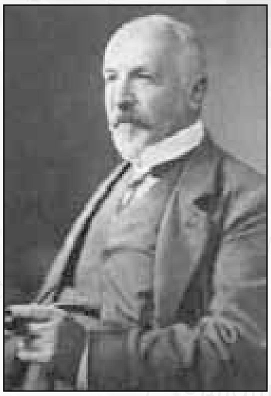
Álgebra

Capítulo 1

Conjuntos y lógica

Reseña HISTÓRICA



Teoría de conjuntos

Georg Cantor fue un matemático alemán, quien con Dedekind inventó la teoría de conjuntos, base de las matemáticas modernas. Gracias a la presentación axiomática de su teoría de los conjuntos, fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no siempre tienen el mismo tamaño, el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es enumerable, es decir, del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: existen, por tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

Lógica matemática

Hasta casi finales del siglo XIX se pensaba que la validez de una demostración, de un razonamiento matemático, consistía principalmente en que "nos convenciera", en que se presentara como evidente a nuestra mente y lo aceptáramos como válido. Ésta era, por ejemplo, la forma de entender la argumentación del mismo René Descartes (1596-1650).

Se cita, como ejemplo, la frase del matemático francés Jean Marie Duhamel (1797-1872): "El razonamiento se hace por el sentimiento que nos produce en la mente la evidencia de la verdad, sin necesidad de norma o regla alguna".

Giuseppe Peano (1858-1932) se levantó contra esta forma de argumentar y, en esencia, defendía que "el valor de una demostración, de un proceso argumentativo, no depende del gusto o sentimientos interiores de nadie, sino de que el argumento tenga una propiedad de validez universalmente comprobable".

Para Peano la lógica matemática era, realmente, la lógica de la matemática, un instrumento cuyo objetivo era dar el rigor y adecuado valor a las argumentaciones del quehacer de la matemática.

Georg Cantor (1845-1918)

Simbología

Éstos son los símbolos que se utilizarán en el capítulo:

$\{\ \}$ Conjunto.

$\in$ Es un elemento del conjunto o pertenece al conjunto.

$\notin$ No es un elemento del conjunto o no pertenece al conjunto.

$|$ Tal que.

$n(C)$ Cardinalidad del conjunto C.

U Conjunto universo.

ϕ Conjunto vacío.

$\subseteq$ Subconjunto de.

$\subset$ Subconjunto propio de.

$\not\subset$ No es subconjunto propio de.

$>$ Mayor que.

$<$ Menor que.

$\geq$ Mayor o igual que.

$\leq$ Menor o igual que.

$\cap$ Intersección de conjuntos.

$\cup$ Unión de conjuntos.

A' Complemento del conjunto A.

$=$ Símbolo de igualdad.

$\neq$ No es igual a.

$\ldots$ El conjunto continúa.

$\Rightarrow$ Entonces.

$\Leftrightarrow$ Si y sólo si.

$\sim$ No (es falso que).

$\wedge$ y

$\vee$ o

Conjuntos

Un conjunto es una colección de cosas u objetos con características definidas. Los conjuntos se representan con letras mayúsculas y sus elementos se delimitan con llaves y separan con comas.

Ejemplos

a) El conjunto de las vocales.

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

b) El conjunto de los dígitos.

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

c) El conjunto de los números naturales.

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$$

Observación: los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa y que los elementos siguientes conservan la misma característica.

d) El conjunto de los días de la semana.

$$S = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

e) El conjunto de los números naturales entre 5 y 10.

$$P = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Para indicar que un elemento pertenece o no a un conjunto se utilizan los símbolos $\in$ y $\notin$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el conjunto $A = \{ a, e, i, o, u \}$, entonces
u pertenece al conjunto A y se representa $u \in A$.
x no pertenece al conjunto A y se representa $x \notin A$.

2 Sea el conjunto $B = \{ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 \}$, entonces

$$2 \in B,\ 5 \in B,\ 1 \notin B,\ 11 \notin B$$

EJERCICIO 1

Dados los conjuntos: $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ coloca $\in$ o $\notin$ según corresponda:

1. a _____ B
2. c _____ A
3. 2 _____ B
4. 3 _____ A
5. u _____ A
6. 5 _____ B
7. i _____ A
8. o _____ B
9. e _____ A
10. 8 _____ B
11. b _____ B
12. 1 _____ A

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conjuntos de números

- **Números naturales:** $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\}$
- **Números enteros:** $Z = \{\ldots -, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Números racionales:** $Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q},\ p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

Ejemplos

$$\frac{6}{5},\ -\frac{2}{7},\ 6,\ -8, 0.75 = \frac{3}{4},\ 0.\bar{2} = \frac{2}{9}$$

- **Números irracionales.** Números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros.

Ejemplos

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[7]{64},\ e,\ \pi, \ldots$$

- **Números reales.** Es la unión de los números racionales con los irracionales.

Tipos de números

- **Números dígitos.** Forman la base del sistema decimal

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- **Número par.** Son los divisibles entre 2.

Ejemplos

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

- **Número impar.** Son los no divisibles entre 2.

Ejemplos

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, …

- **Número primo.** Sólo tiene dos divisores, entre sí mismo y la unidad.

Ejemplos

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

- **Número compuesto.** Tiene dos o más divisores primos.

Ejemplos

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, …

- **Múltiplo de un número.** El múltiplo de un número k, es nk, donde n es un natural.

Ejemplos

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

Escritura y representación de conjuntos

Los conjuntos se representan de dos formas:

- **Forma descriptiva o por comprensión.** Se hace mención a la característica principal de los elementos del conjunto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma descriptiva el conjunto $S = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 6 \}$.

Solución

Este conjunto se lee:

x pertenece al conjunto de los números naturales, tal que x es un divisor de seis.
x es una variable que cumple con las características del conjunto S.

2 Si $Q = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ representa su forma descriptiva.

Solución

$Q = \{q \in N \mid q \text{ es primo menor que } 12\}$

- **Forma enumerativa o por extensión.** Se enlistan los elementos del conjunto, si algún elemento se repite se considera una sola vez.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma enumerativa el conjunto $M = \{m \in N \mid m < 5\}$.

Solución

El conjunto se lee:

los números naturales que son menores que 5 y su representación en forma enumerativa es:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

2 Representa en forma enumerativa el conjunto: $A = \{x \in Z \mid x + 8 = 10\}$.

Solución

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por tanto, su forma enumerativa es:

$$A = \{2\}$$

Ya que $2 + 8 = 10$

EJERCICIO 2

Transforma a la forma descriptiva o enumerativa los siguientes conjuntos:

1. $R = \{ 1, 2, 5, 10 \}$
2. $A = \{ x \in N \mid 1 < x \leq 9 \}$
3. $B = \{ x \in N \mid x + 3 = 7 \}$
4. $C = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$
5. $V = \{ y \in Z \mid -2 \leq y < 3 \}$
6. $Q = \{ x \mid x$ es una vocal de la palabra número $\}$
7. $T = \{ x$ es un dígito de la cifra 453 425 $\}$
8. $S = \{ x$ es un dígito primo de la cifra 729 634 $\}$
9. $U = \{ 4, 8, 12, 16, \ldots \}$
10. $M = \{ x \in N \mid x$ es divisor par de 50 $\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cardinalidad

Es el número de elementos que contiene un conjunto.

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{ x \mid x$ es compuesto menor que 10, $x \in N \}$?

Solución

El conjunto A, en forma enumerativa, es:

$$A = \{ 4, 6, 8, 9 \}$$

Entonces su cardinalidad es 4 y se denota: $n(A) = 4$

Conjunto finito. Es aquel conjunto con cardinalidad definida.

Ejemplo

¿El conjunto $B = \{ x \mid x$ es un día de la semana $\}$ es finito?

Solución

El conjunto B en forma enumerativa es:

$$B = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}$$

El conjunto tiene 7 elementos, es decir su cardinalidad está definida, por tanto es finito.

Conjunto infinito. Es aquél cuya cardinalidad no está definida, por ser demasiado grande para cuantificarlo.

Ejemplo

¿El conjunto $C = \{ x \in N \mid x$ es múltiplo de 3 $\}$ es infinito?

Solución

El conjunto C en su forma enumerativa es:

$$C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, \ldots \}$$

El conjunto continúa indefinidamente, no se puede determinar su número de elementos, por tanto, su cardinalidad es infinita y se escribe como:

$$n(C) = \infty$$

Conjunto vacío o nulo. Es aquel que carece de elementos y se denota con el símbolo ϕ o bien { }.

EJEMPLOS

1 ¿El conjunto $D = \{ x \in N \mid 2x - 1 = 0 \}$ es vacío?

Solución

El único valor de x que satisface la igualdad es $\frac{1}{2}$ pero no pertenece al conjunto de los números naturales, por tanto, el conjunto D es vacío.

$$D = \{ \ \} = \phi \text{ su cardinalidad es } n(D) = 0$$

2 ¿El conjunto $E = \{ x \mid x$ es un número par e impar $\}$ es vacío?

Solución

El conjunto E es vacío, ya que no hay ningún número que sea par e impar a la vez.

EJERCICIO 3

Encuentra la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 30 $\}$
2. $B = \{ x$ es vocal de la palabra casa $\}$
3. $S = \{ x \mid x$ es una estación del año $\}$
4. $R = \{ x \in N \mid x + 3 = 1 \}$
5. $Q = \{ x \in N \mid x > 6 \}$
6. $T = \{ x \in R \mid x = 6 \}$
7. $M = \{ x \in N \mid x < 1 \}$
8. $L = \{ x \in N \mid x$ es par divisor de 20 $\}$
9. $J = \{ x$ es natural $\}$
10. $O = \{ x \mid x$ es un mes del año $\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conjuntos equivalentes

Sean A y B conjuntos no vacíos, se dice que A es equivalente a B si y sólo si tiene la misma cardinalidad; se denota: $A \cong B$ y se lee A es equivalente a B.

Ejemplo

Si $A = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$ y $B = \{ a, e, i, o \}$ comprueba que A es equivalente a B.

Solución

Las cardinalidades son: $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, por tanto, se concluye que ambos son equivalentes. $A \cong B$.

Conjuntos iguales

Son aquellos que tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos.

Ejemplo

¿Son iguales los conjuntos $A = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 6 \}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$?

Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$A = \{ 1, 2, 3, 6 \} \text{ y } B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

Sus cardinalidades son: $n(A) = n(B) = 4$

Ambos tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos, por tanto, los conjuntos son iguales, es decir, $A = B$.

Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen elementos comunes.

Ejemplo

¿Son disjuntos los conjuntos $R = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 5 \}$ y $S = \{ x \in N \mid 2 < x < 5 \}$?

Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$R = \{ 1, 5, \} \text{ y } S = \{ 3, 4, \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común, por tanto, los conjuntos R y S son disjuntos.

EJERCICIO 4

Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x < 5 \}$

$B = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 8 \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$D = \{ 1, 2, 4, 8 \}$

$E = \{ a, e, i, o \}$

$F = \{ x \mid x \text{ es una vocal de la palabra murciélago} \}$

Verifica si son equivalentes, iguales o disjuntos los siguientes pares de conjuntos:

1. A y C
2. D y E
3. B y F
4. F y D
5. A y D
6. E y B
7. C y E
8. F y C
9. A y F
10. B y D

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Subconjuntos

Dado un conjunto S se dice que A es subconjunto de S, si todos los elementos de A están contenidos en el conjunto S y se denota por $A \subseteq S$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplo

Dados los conjuntos $S = \{ x \mid x \text{ es dígito } \}$ y $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, verifica que $A \subseteq S$.

Solución

El conjunto S en forma enumerativa es: $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

Los elementos de A están contenidos en S, por tanto, $A \subseteq S$.

Subconjunto propio. Dados dos conjuntos A y B, se dice que B es subconjunto propio de A si todos los elementos de B están en A y no son equivalentes.

Ejemplo

Sean los conjuntos $L = \{ 2, 4, 5, 6, 8 \}$ y $M = \{ 2, 4, 6 \}$, verifica que $M \subset L$.

Solución

Los elementos de M están contenidos en L, y M no es equivalente a L, por consiguiente, $M \subset L$.

Número de subconjuntos de un conjunto. El número de subconjuntos está dado por la fórmula:

$$N(s) = 2^n \quad \text{con } n = \text{cardinalidad}$$

Ejemplo

Determina el número de subconjuntos del conjunto:

$$R = \{ a, b, c, d \}$$

Solución

La cardinalidad del conjunto es 4, entonces $n = 4$ y al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\text{Número de subconjuntos} = 2^4 = 16$$

Conjunto potencia

Se le llama así al conjunto que forman todos los subconjuntos de un conjunto.

Ejemplo

Encuentra el conjunto potencia de:

$$T = \{ 2, 4, 6 \}$$

Solución

El número de subconjuntos de T es:

$$N(s) = 2^3 = 8$$

El conjunto potencia está formado por 8 subconjuntos de cero, uno, dos y tres elementos, los cuales son:

$$\{\{\ \},\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$$

Conjunto universo

Sean A, B, C, …, subconjuntos de un conjunto U, a este último se le llama conjunto universo de los conjuntos dados.

Ejemplo

Sea $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ y los conjuntos A, B y C tales que:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \},\ B = \{ 1, 2, 3, 4 \} \text{ y } C = \{ 1, 2, 6, 7 \}$$

Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, siendo U el conjunto universo.

EJERCICIO 5

Resuelve lo que se indica en los siguientes ejercicios:

1. Si $W = \{ x, y, z \}$, halla el número de subconjuntos de W.
2. Si $T = \{ x \in N \mid 1 < x < 7 \}$, determina el número de subconjuntos de T.
3. Si $A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$, halla el número de subconjuntos de A.
4. Sea el conjunto $L = \{ \alpha, \beta, \theta \}$, determina el conjunto potencia.
5. Sea el conjunto $M = \{ a, c, e, f \}$, determina el conjunto potencia.
6. Sea el conjunto $N = \{1, 2, 3, 6\}$, halla el conjunto potencia.
7. Sea el conjunto $P = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 9$\}$, determina el conjunto potencia.
8. Sea el conjunto $Q = \{ x \in N \mid 4 < x \leq 7 \}$, determina el conjunto potencia.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diagramas de Venn

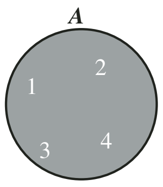
Es la representación de un conjunto o conjuntos y sus operaciones, que delimitan figuras planas como círculos o rectángulos; por lo general los círculos delimitan a los elementos del conjunto o conjuntos dados y los rectángulos delimitan al conjunto universo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en un diagrama de Venn el conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Solución



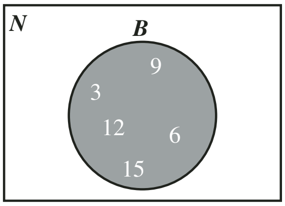
2 Representa en un diagrama de Venn el conjunto:

$$B = \{ x \in N \mid x \text{ es múltiplo de 3 menor que 17} \}$$

Solución

El conjunto B en forma enumerativa es: $B = \{ 3, 6, 9, 12, 15 \}$ y el conjunto universo son los números naturales.

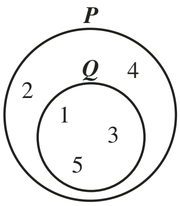
Por tanto, el diagrama es:



3 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $Q = \{ 1, 3, 5 \}$ y $P = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

Solución

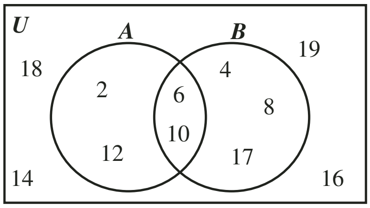
El conjunto Q es un subconjunto propio de P, ya que todos los elementos de Q son elementos de P, por consiguiente, la representación de ambos conjuntos en un diagrama de Venn es:



4 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2,4,6,8,10,12,14,16,17,18,19\}$, $A = \{2,6,10,12\}$ y $B = \{4,6,8,10,17\}$

Solución

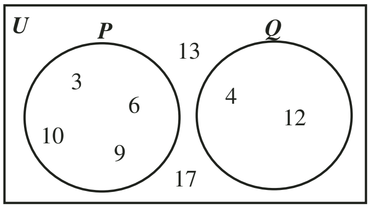
Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los conjuntos A y B. Los elementos faltantes de cada conjunto se colocan, respectivamente, en la región sobrante. Los elementos del universo que no aparecen en los conjuntos se colocan fuera de ellos.



5 Sean los conjuntos $U = \{3,4,6,9,10,12,13,17\}$, $P = \{3,6,9,10\}$ y $Q = \{4,12\}$, represéntalos en un diagrama de Venn.

Solución

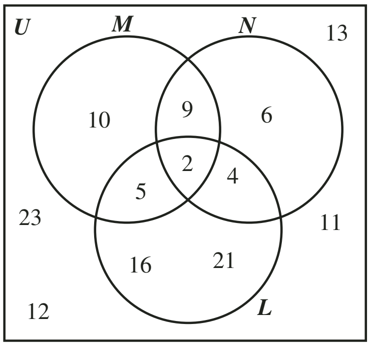
No hay elementos en común; en el diagrama los conjuntos están separados con sus respectivos elementos y los elementos que no pertenecen a los conjuntos se colocan fuera de ellos.



6 Dibuja en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2,4,5,6,9,10,11,12,13,16,21,23\}$, $M = \{2,5,9,10\}$, $N = \{2,4,6,9\}$ y $L = \{2,4,5,16,21\}$

Solución

Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los 3 conjuntos y los demás elementos se colocan en sus conjuntos correspondientes, de la misma forma que en los ejemplos anteriores.

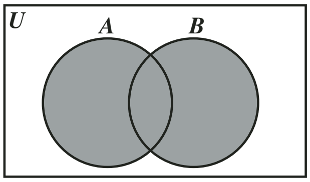


Unión de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, entonces la unión de A y B, se define:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando ambos conjuntos.



La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos de ambos conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $A = \{ 3, 5, 6, 8, 10 \}$ y $B = \{ 2, 6, 8, 10, 12 \}$, halla $A \cup B$.

Solución

El conjunto solución de la unión de los conjuntos A y B son todos los elementos de ambos conjuntos, los elementos que se repiten sólo se escriben una vez.

Por tanto, el conjunto es:

$$A \cup B = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12 \}$$

2 Si $S = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 20 $\}$ y $T = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$, halla y representa en un diagrama de Venn $S \cup T$.

Solución

La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

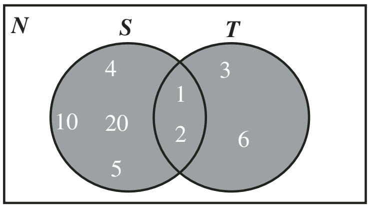
$$S = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$

$$T = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

El conjunto solución de la unión de los conjuntos S y T es:

$$S \cup T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20 \}$$

Diagrama de Venn



3 Para los conjuntos $U = \{ x \mid x$ es un dígito $\}$, $P = \{ x \in U \mid x$ es par $\}$ y $Q = \{ x \in U \mid x$ es impar $\}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $P \cup Q$.

Solución

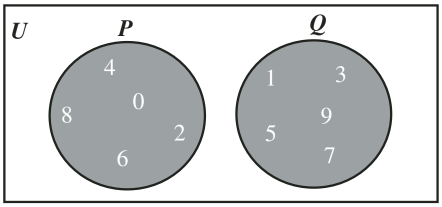
La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},\ P = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \} \text{ y } Q = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

El conjunto solución de la unión de P y Q es:

$$P \cup Q = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn

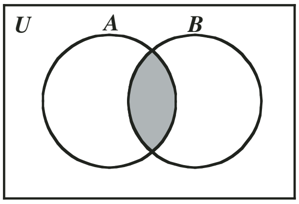


Intersección de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, entonces la intersección de A y B se define:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región común de ambos conjuntos.



En esta operación se toman únicamente los elementos que se repiten en los dos conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, $A = \{ 1, 2, 5, 6 \}$ y $B = \{ 1, 4, 5, 6, 7 \}$, precisa y representa en un diagrama de Venn $A \cap B$.

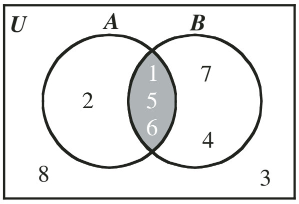
Solución

Para encontrar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos A y B, se toman únicamente los elementos que se repiten en los conjuntos.

Por tanto, el conjunto es

$$A \cap B = \{ 1, 5, 6 \}$$

Diagrama de Venn



2 Encuentra la intersección de los conjuntos $C = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$, $D = \{ x \in N \mid x \geq 6 \}$ y su diagrama de Venn.

Solución

La transformación en su forma enumerativa de los conjuntos es:

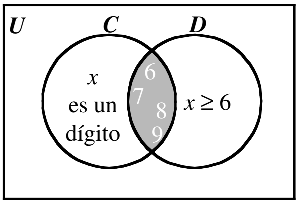
$$C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}, D = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11... \}$$

Para hallar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos C y D, se toman únicamente los elementos que se repiten en los 2 conjuntos.

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$C \cap D = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn



3 Para: $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $S = \{ x \in U \mid x \text{ es par} \}$ y $T = \{ x \in U \mid x \text{ es impar} \}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $S \cap T$.

Solución

La forma enumerativa de los conjuntos es:

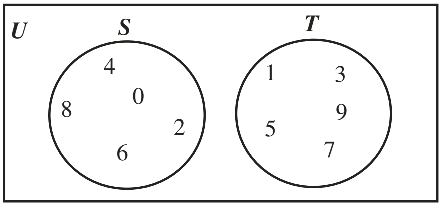
$$S = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$$
$$T = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común.
Por tanto, el conjunto solución es vacío:

$$A \cap B = \{\} = \phi$$

Diagrama de Venn

El diagrama de Venn no se sombrea



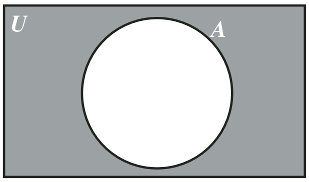
Conjunto complemento

Sea U el conjunto universo y A un subconjunto de U, el complemento de A se define:

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ y } x \notin A \}$$

El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a U y no pertenecen al conjunto A y se representa como A' o A^c.

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región fuera del conjunto A.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el complemento y su diagrama de Venn del conjunto $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$, si el universo es $U = \{ x \in N \mid x \leq 10 \}$.

Solución

El conjunto U en su forma enumerativa es:

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

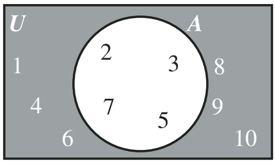
(*continúa*)

(*continuación*)

Por consiguiente, el complemento de A es:

$$A' = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10 \}$$

Diagrama de Venn



2 Sea $U = \{ x \in N \mid x$ es un número compuesto menor que 16 $\}$. Determina el complemento del conjunto $M = \{ x \in U \mid x$ es impar $\}$.

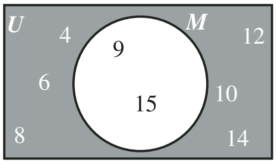
Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$U = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 \}$$
$$M = \{ 9, 15 \}$$

Por tanto, el conjunto complemento de M es: $M' = \{ 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$

Diagrama de Venn



3 Sean los conjuntos

$U = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14 \}$
$A = \{ 2, 5, 6, 9, 12 \}$
$B = \{ 3, 5, 6, 8, 9 \}$

Determina $A' \cap B$.

Solución

Se obtiene el complemento de A:

$$A' = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \}$$

Se obtiene la intersección de A' con el conjunto B:

$$A' \cap B = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \} \cap \{ 3, 5, 6, 8, 9 \} = \{ 3, 8 \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$A' \cap B = \{ 3, 8 \}$$

4 Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$
$B = \{ x \in N \mid 6 \leq x < 10 \}$
$C = \{ x \in N \mid x$ es impar $\}$

Halla $(A \cup B) \cap C$

Solución

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \},\ B = \{ 6, 7, 8, 9 \} \text{ y } C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots \}$$

Se halla $A \cup B$:

$$A \cup B = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$

Con el conjunto C y el conjunto anterior se halla la intersección:

$$(A \cup B) \cap C = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \} \cap \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots \} = \{ 7, 9 \}$$

Finalmente, el conjunto solución es:

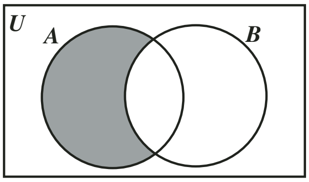
$$(A \cup B) \cap C = \{ 7, 9 \}$$

Diferencia de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, se define la diferencia como el conjunto que contiene a los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen al conjunto B. La diferencia se representa como $A - B$.

$$A - B = A \cap B^c = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

Su diagrama de Venn se representa de la manera siguiente:



Ejemplo

Si $A = \{ a, b, c, d, e \}$ y $B = \{ a, e, i, o, u \}$, hallar $A - B$ y su diagrama de Venn.

Solución

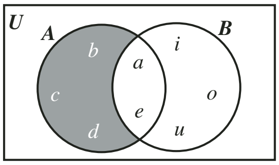
El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen al conjunto B, entonces:

$$A - B = \{ a, b, c, d, e \} - \{ a, e, i, o, u \}$$

Por tanto, el conjunto es:

$$A - B = \{ b, c, d \}$$

Diagrama de Venn



EJERCICIO 6

Sean los conjuntos:

$U = \{x \in Z \mid -4 < x \leq 7\}$
$A = \{x \in U \mid x < 3\}$
$B = \{x \in U \mid x \text{ es un número par mayor que } 1\}$

Representa en diagrama de Venn y determina:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. A'
4. B'
5. $A - B$
6. $B - A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

En los siguientes ejemplos, se combinan las operaciones de conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dados los conjuntos $U = \{ x \in N \mid x \leq 9 \}$, $A = \{ x \in N \mid 3 < x < 8 \}$ y $B = \{ 1, 4, 7, 9 \}$, encuentra el conjunto solución de: $A' \cap B'$

Solución

Se escriben los conjuntos U y A en su forma enumerativa:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ $\qquad$ $A = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

Se buscan los complementos de ambos conjuntos:

$A' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \}$ $\qquad$ $B' = \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$

Se efectúa la operación y el conjunto solución es:

$$A' \cap B' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \} \cap \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$$
$$= \{ 2, 3, 8 \}$$

2 Para los conjuntos:

$P = \{ x \in N \mid -3 < x \leq 6 \}$ $\qquad$ $R = \{ x \in N \mid x \text{ es par menor que } 16 \}$
$Q = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 20 \}$ $\qquad$ $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Determina $(P - Q) \cup (R \cap S)$

Solución

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$P = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $\qquad$ $R = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$
$Q = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$ $\qquad$ $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Se obtiene la diferencia entre los conjuntos P y Q:

$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} - \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$
$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 3, 6 \}$$

Se determina la intersección de R y S:

$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \} \cap \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$
$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Se determina la unión:

$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 3, 6\} \cup \{2, 4, 6, 8 \}$$
$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

EJERCICIO 7

Sean los conjuntos:

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$A = \{ x \in U \mid x \text{ es par menor que } 10\}$

$B = \{ x \in U \mid x \text{ es divisor de } 12 \}$

$C = \{ x \in U \mid x < 6 \}$

$D = \{ x \in U \mid 2 < x \leq 6 \}$

$E = \{ x \in U \mid x \text{ es un dígito} \}$

$F = \{ x \in U \mid x > 13 \}$

$G = \{ x \in U \mid x \text{ es par mayor que } 10 \}$

Determina:

1. $A \cup B$
2. $B \cup C$
3. $C \cup D$
4. $D \cup B$
5. $A \cap B$
6. $A \cap D$
7. $C \cap E$
8. $B \cap C$
9. A'
10. B'
11. C'
12. D'
13. $A - B$
14. $C - D$
15. $E - B$
16. $B - A$
17. $A' \cap B$
18. $A \cup B'$
19. $B' \cap E'$
20. $A' - G$
21. $(A \cup B)'$
22. $(A \cap B)'$
23. $(A \cup F) \cap C$
24. $B \cup (F - G)$
25. $(F - G) \cap E'$
26. $(F \cap G) \cup D$
27. $E' \cap (A \cup G)$
28. $(E \cup F) \cap (A \cup G)$
29. $(C \cup E) \cap (F \cup G)$
30. $(B \cup D) \cup (F \cap G)$
31. $(B \cup D)' - (E \cup G)'$
32. $(A' \cap B') - (E' \cap F')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones de conjuntos con diagramas de Venn

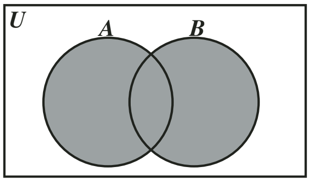
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B)'$:

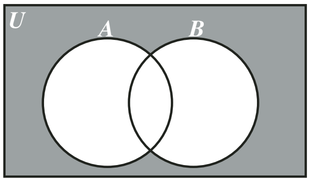
Solución

Se determina el diagrama de la unión del conjunto A con B.



$A \cup B$

El complemento es todo lo que no pertenece a la unión, por tanto, su diagrama de Venn es:

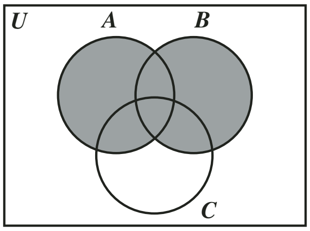


$(A \cup B)'$

2 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B) \cap C$.

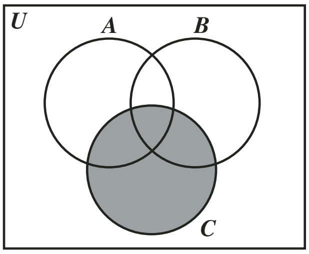
Solución

Diagrama de Venn de $(A \cup B)$

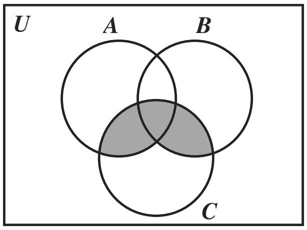


$(A \cup B)$

Diagrama de Venn del conjunto C



La intersección de la unión de A con B y el conjunto C, es la región común entre las áreas sombreadas.

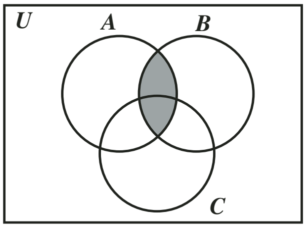


$(A \cup B) \cap C$

3 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cap B) \cup (A - C)$.

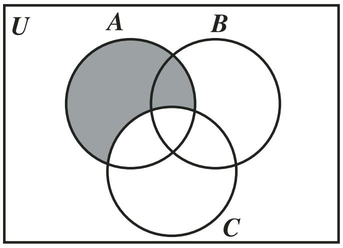
Solución

Diagrama de Venn $(A \cap B)$



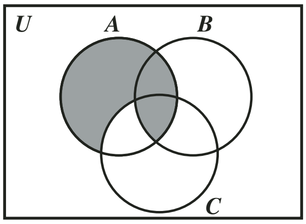
$A \cap B$

Diagrama de Venn $(A - C)$



$A - C$

Finalmente, el conjunto solución es la unión de las áreas sombreadas.



$(A \cap B) \cup (A - C)$

EJERCICIO 8

Realiza el diagrama de Venn de cada una de las siguientes operaciones:

1. A'
2. $(A \cap B)'$
3. $A' \cap B'$
4. $A \cap B \cap C$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $B' \cap (A - C)$
7. $(A \cup C) \cap (B - C)$
8. $(A - B) \cup (A \cap C)$
9. $(A \cap B \cap C)'$
10. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
11. $((A - B) \cup (B \cap C))'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$U = \{ a, b, c, d, f, g, h, i \}$

$A = \{ a, b, c, d \}$

$B = \{ b, d, g, h \}$

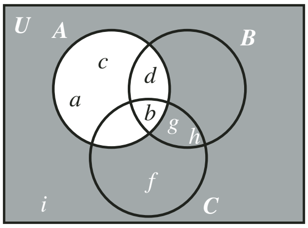
$C = \{ b, f, g, h \}$

Representa en diagrama de Venn y halla el conjunto solución $(A' - B) \cap C$.

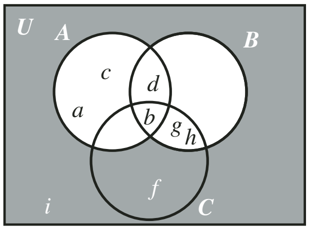
Solución

Para determinar el conjunto se procede de la siguiente manera:

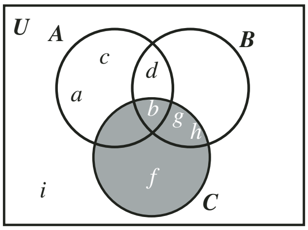
Se halla primero A', se realiza la diferencia con el conjunto B y, finalmente, con esta última operación se realiza la intersección con el conjunto C.



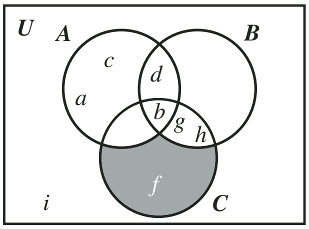
A'



$A' - B$



C



$(A' - B) \cap C = \{ f \}$

EJERCICIO 9

Sean los conjuntos:

$U = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$

$A = \{ x \in U \mid x < 5 \}$

$B = \{ x \in U \mid x \text{ sea primo} \}$

$C = \{ 2, 4, 5, 8 \}$

Representa en diagrama de Venn y determina el conjunto solución.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A' \cup B'$
4. $A' \cap B'$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $(A \cup B \cup C)'$
7. $(A' - B') \cap C$
8. $(A - B)' \cap (B \cap C)'$
9. $(A - B)' \cup C'$
10. $(A \cap B)' \cap (A' \cap B')$
11. $(A - B)' \cap (B - C)'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se realizó una encuesta a 82 alumnos sobre el tipo de música que más les agrada; los resultados fueron los siguientes: a 32 de ellos les gusta el pop, a 33 les agrada el rock, a 36, el reggae, a 10 les gusta el pop y el rock, a 11 el pop y el reggae, a 9 les agrada el rock y el reggae, a 4 les gustan los 3 estilos y únicamente a 7 otros tipos de música.

¿Cuántos estudiantes sólo prefieren rock?
¿A cuántos alumnos sólo les agrada el reggae?
¿Cuántos estudiantes prefieren únicamente pop y reggae?
¿Cuántos alumnos prefieren solamente rock y reggae?

Solución

Se construye el diagrama de Venn, de la siguiente manera:

Se inicia con la zona en la que se intersecan los 3 conjuntos.

$$4$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el pop y el rock únicamente.

$$10 - 4 = 6$$

Se obtienen los estudiantes de la zona donde se interseca el pop y el reggae, solamente.

$$11 - 4 = 7$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el rock y el reggae únicamente.

$$9 - 4 = 5$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan pop.

$$32 - (6 + 4 + 7) = 15$$

Se obtienen los alumnos de la zona que únicamente escuchan rock.

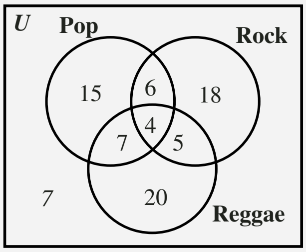
$$33 - (6 + 4 + 5) = 18$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan reggae.

$$36 - (7 + 4 + 5) = 20$$

Los alumnos a quienes les gusten otros estilos, se colocan en la zona que no corresponde a los conjuntos anteriores.

El diagrama de Venn que se obtiene es:



Finalmente:

Los alumnos que sólo prefieren rock, son 18
Los alumnos que sólo les agrada reggae, son 20
Los alumnos que prefieren únicamente pop y reggae, son 7
Los alumnos que prefieren únicamente rock y reggae, son 5

2 En una preparatoria se obtuvieron los siguientes datos de 350 estudiantes:

200 alumnos aprobaron la materia de cálculo diferencial;
160 estudiantes aprobaron física;
187 aprobaron historia;
112 aprobaron cálculo diferencial e historia;
120 aprobaron cálculo diferencial y física;
95 aprobaron física e historia;
80 alumnos aprobaron cálculo diferencial, física e historia.

Indica cuántos de estos 350 alumnos aprobaron:

1. Sólo una materia
2. Exactamente 2 materias
3. Al menos una materia
4. Cuando mucho 2 materias

Solución

Otra forma de resolver este tipo de problemas es la siguiente:

Se denotan los conjuntos de los estudiantes

U: Conjunto universo

C = { alumnos que aprobaron cálculo diferencial }

F = { alumnos que aprobaron física }

H = { alumnos que aprobaron historia }

Cardinalidad de los conjuntos:

$n(U) = 350$ $n(C) = 200$ $n(F) = 160$ $n(H) = 187$

$n(C \cap H) = 112$ $n(C \cap F) = 120$ $n(F \cap H) = 95$ $n(C \cap F \cap H) = 80$

Para construir el diagrama de Venn se obtienen los siguientes datos:

Se coloca el número de estudiantes que aprobaron las tres materias; es decir, la intersección de los tres conjuntos: $n(C \cap F \cap H) = 80$

Se completa el número de estudiantes que aprobaron dos materias únicamente; es decir, la intersección de dos conjuntos:

$$n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 112 - 80 = 32$$

$$n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H) = 120 - 80 = 40$$

$$n(F \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 95 - 80 = 15$$

Se completa el número de estudiantes de cada conjunto, el cual es el número de estudiantes que aprobaron una sola materia.

Para el conjunto C:

$$n(C) - \left[n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H)\right] - \left[n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H)\right] - n(C \cap F \cap H) =$$

$= 200 - 40 - 32 - 80 = 48$ alumnos sólo aprobaron cálculo diferencial.

De una forma análoga se obtiene para los conjuntos F y H.

$$n(F)-\left[n(C\cap F)-n(C\cap F\cap H)\right]-\left[n(F\cap H)-n(C\cap F\cap H)\right]-n(C\cap F\cap H)=$$

= 160 – 40 – 15 – 80 = 25 alumnos sólo aprobaron física.

$$n(H)-\left[n(F\cap H)-n(C\cap F\cap H)\right]-\left[n(C\cap H)-n(C\cap F\cap H)\right]-n(C\cap F\cap H)=$$

= 187 – 15 – 32 – 80 = 60 sólo aprobaron historia.

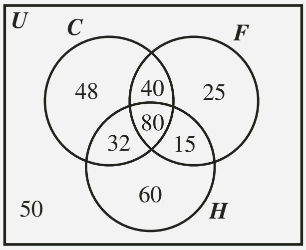
Para completar el diagrama se determina el número de alumnos que no aprobaron ninguna materia.

Es la diferencia del total de estudiantes, de los cuales se obtuvieron los datos y el total de alumnos de los conjuntos.

$$350-\left[n(C)+n(F)+n(H)-n(C\cap F)-n(C\cap H)-n(F\cap H)+n(C\cap F\cap H)\right]$$

$$350-(200+160+187-120-112-95+80)=350-300=50$$

Diagrama de Venn



Finalmente:

Sólo una materia:

Suma de los alumnos que aprobaron una sola materia de cada conjunto:

$$n(C)+n(F)+n(H)-2\,n(C\cap F)-2\,n(C\cap H)-2\,n(F\cap H)+3\,n(C\cap F\cap H)$$

$$200+160+187-2(120)-2(112)-2(95)+3(80)=133$$

Exactamente 2 materias:

Suma de los estudiantes que aprobaron 2 materias únicamente:

$$n(C\cap H)+n(C\cap F)+n(F\cap H)-3\cdot n(C\cap F\cap H)=112+120+95-3(80)=87$$

Al menos una materia:

Son los estudiantes que aprobaron 1, 2 o 3 materias:

$$n(C)+n(F)+n(H)-n(C\cap F)-n(C\cap H)-n(F\cap H)+n(C\cap F\cap H)=300$$

Cuando mucho 2 materias:

Son los estudiantes que aprobaron 0, 1 o 2 materias:

$$350-n(C\cap F\cap H)=270$$

EJERCICIO 10

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una empresa realizó una encuesta a 250 personas para saber qué programa de televisión prefieren ver en domingo. Se les dieron 3 opciones: deportes, películas o musicales. El resultado de la encuesta fue: 130 personas prefieren deportes; 80 prefieren ver películas; 40, musicales; 25 prefieren deportes y películas; 20, películas y musicales; 10, deportes y musicales; y sólo a 6 personas les gustan los tres tipos de programas.

   a) ¿Cuántas prefieren ver sólo deportes?
   b) ¿Cuántas prefieren ver sólo un programa de televisión?
   c) ¿Cuántas prefieren ver películas o musicales?

2. A los niños de una organización civil se les apoya para que hagan deporte. Una encuesta reveló que los deportes que más les agradan son: natación, futbol, béisbol, entre otros. Los resultados de la encuesta fueron: 7 sólo prefieren natación; 28 sólo quieren jugar futbol; uno sólo quiere practicar béisbol; 30, natación y futbol; 18, natación y béisbol; 20, futbol y béisbol; 12, los 3 deportes de mayor preferencia y 20, otros deportes.

   a) ¿Cuántos niños quieren béisbol o natación?
   b) ¿Cuántos niños prefieren futbol o béisbol?
   c) ¿Cuántos niños fueron encuestados?
   d) ¿Cuántos niños prefieren únicamente 2 deportes?

3. Una empresa concede como prestación a sus empleados la asistencia a su club deportivo; en éste hay canchas de squash, un gimnasio, un boliche y una cafetería, donde se pueden divertir con juegos de mesa o simplemente platicar. A 70 personas se les aplicó una encuesta para saber la actividad de esparcimiento de su preferencia y se encontró que: 20 prefieren boliche, 27 el gimnasio, 24 squash, 8 boliche y gimnasio, 10 squash y boliche, 15 squash y gimnasio y, por último, 6 prefieren squash, gimnasio y boliche.

   a) ¿Cuántas únicamente prefieren jugar boliche?
   b) ¿Cuántas únicamente quieren jugar squash?
   c) ¿Cuántas personas sólo desean estar en el gimnasio?
   d) ¿Cuántas personas prefieren otras actividades?
   e) ¿Cuántas prefieren el squash o el boliche?
   f) ¿Cuántas no quieren boliche o squash?

4. En un supermercado se hizo una encuesta a 60 personas, para saber qué tipo de bebida alcohólica que esté en oferta prefieren. Los resultados fueron: 12 comprarían whisky y tequila; 16 vodka y tequila; 14 whisky y vodka; 29 whisky; 30 tequila; 29 vodka y sólo 9 personas las 3 bebidas.

   a) ¿Cuántas personas contestaron que otras bebidas?
   b) ¿Cuántas prefieren 2 tipos de bebida únicamente?
   c) ¿Cuántas quieren al menos una de las tres bebidas?
   d) ¿Cuántas quieren sólo un tipo de bebida?

5. En una fiesta infantil a los niños se les pidió su opinión acerca del sabor del helado que preferirían comer. Los resultados fueron los siguientes: 9 quieren de chocolate, vainilla y fresa; 12 de fresa y vainilla; 13 de chocolate y fresa; 15 de chocolate y vainilla; 18 de fresa; 26 de vainilla; 29 de chocolate y 8 niños prefieren de otros sabores.

   a) ¿Cuántos niños había en la fiesta?
   b) ¿Cuántos quieren sólo de 2 sabores?
   c) ¿Cuántos sólo de un sabor?
   d) ¿Cuántos no quieren de chocolate o fresa?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Álgebra de conjuntos

En el siguiente cuadro se muestran diferentes operaciones con conjuntos. Sean los conjuntos U, A, B y C tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$, donde U es el conjunto universo.

Operaciones con conjuntos	
1. $(A')' = A$	8. $A \cup A = A$
2. $\phi' = U$	9. $A \cup A' = U$
3. $A - A = \phi$	10. $U' = \phi$
4. $A - \phi = A$	11. $A \cap U = A$
5. $A - B = A \cap B'$	12. $A \cap \phi = \phi$
6. $A \cup \phi = A$	13. $A \cap A = A$
7. $A \cup U = U$	14. $A \cap A' = \phi$
Asociativas	***Conmutativas***
15. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	19. $A \cup B = B \cup A$
16. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	20. $A \cap B = B \cap A$
Distributivas	***Leyes de De Morgan***
17. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	21. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
18. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	22. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Solución

Si $x \in (A \cup B)'$

Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cup B)$	Definición de complemento
Si $x \notin (A \cup B)$, entonces $x \notin A$ o $x \notin B$	Definición de unión de conjuntos
Si $x \notin A$ o $x \notin B$, entonces $x \in A'$ y $x \in B'$	Definición de complemento
Entonces $x \in (A' \cap B')$	Definición de intersección de conjuntos
Por tanto, $(A \cup B)' = A' \cap B'$	

2 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Solución

Si $x \in (A \cap B)'$

Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cap B)$	Definición de complemento
Si $x \notin (A \cap B)$, entonces $x \notin A$ y $x \notin B$	Definición de intersección de conjuntos
Si $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \in A'$ o $x \in B'$	Definición de complemento
Entonces $x \in (A' \cup B')$	Definición de unión de conjuntos
Por tanto, $(A \cap B)' = A' \cup B'$	

Es más práctico realizar las demostraciones utilizando las leyes y operaciones de conjuntos.

3 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Solución

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$	Ley distributiva (18)
$= A \cap U$	Operaciones con conjuntos (9)
$= A$	Operaciones con conjuntos (11)

4 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Solución

$(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B)$	Ley conmutativa (19)
$= (C \cup A) \cap (C \cup B)$	Ley distributiva (17)
$= (A \cup C) \cap (B \cup C)$	Ley conmutativa (19)

5 Aplica las leyes y demuestra que $A \cap (B \cap C)' = (A - B) \cup (A - C)$.

Solución

$A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$	Ley de De Morgan (22)
$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$	Ley distributiva (18)
$= (A - B) \cup (A - C)$	Operaciones con conjuntos (5)

EJERCICIO 11

Aplica las leyes y demuestra las siguientes identidades:

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A' \cap (B \cup C)' = (A \cup B \cup C)'$
4. $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
5. $(A \cup B) \cap A' = A' \cap B$
6. $A' - (A \cup C)' = C - A$
7. $A \cup (B \cap A') = A \cup B$
8. $A - (A - B)' = A - B$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lógica

La lógica se ocupa del razonamiento a partir de las premisas, las cuales son proposiciones que dan la pauta para el proceso deductivo e inductivo. Analicemos algunos conceptos:

Inferir. Proceso de unir ideas para llegar a conclusiones verdaderas a partir de proposiciones verdaderas.

Proposición lógica. Es un enunciado que se califica como falso o verdadero, pero no ambos a la vez.

Ejemplos

a = "Cuba está en América"	Verdadero ($\boldsymbol{v}$)
b = "4 es número impar"	Falso ($\boldsymbol{f}$)
c = "El elefante es un ave"	($\boldsymbol{f}$)
p = "Los perros ladran"	($\boldsymbol{v}$)
q = "Hermosa tarde"	No es una proposición lógica

Negación. Se obtiene negando o afirmando el enunciado y se denota por el símbolo (~).

Ejemplo

Sea la proposición:

$$a = \text{"5 es número primo"}$$

La negación de la proposición es:

$$\sim a = \text{"5 no es número primo"}$$

Tipos de proposiciones

Proposición lógica simple. Es aquella que está formada por un solo enunciado.

Ejemplos

t = "El delfín es un mamífero"

r = "4 es número par"

Proposición lógica compuesta. Es aquella que forman 2 o más proposiciones simples unidas por uno o más conectivos lógicos.

Ejemplos

a = "8 es número par y 5 es número primo"

b = "China está en Asia o Colombia está en América"

c = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

p = "8 es número par si y sólo si es divisible por 2"

Proposiciones compuestas

En el siguiente cuadro se muestran las distintas proposiciones compuestas con su respectivo conectivo lógico y símbolo.

Nombre	Conectivo lógico	Símbolo
Negación	No	$\sim$
Disyunción	o	$\vee$
Conjunción	y	$\wedge$
Implicación	entonces	$\Rightarrow$
Doble implicación	Si y sólo si	$\Leftrightarrow$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las proposiciones:

a = "El tucán es un ave"
b = "El león es un mamífero"

La disyunción entre las proposiciones es:

$a \vee b$ = "El tucán es un ave o el león es un mamífero"

2 Sean las proposiciones:

p = "4 es número par"
q = "4 es número natural",

La conjunción entre las proposiciones es:

$p \wedge q$ = "4 es número par y es número natural"

3 Sean las proposiciones:

p = "$x \leq 8, x \in Z$"
$p \wedge q$ = "2 es divisor de 6 y es primo"
$p \vee q$ = "8 es número impar o es compuesto"

La negación entre las proposiciones es:

$\sim p$ = "$x \nleq 8, x \in Z$" o "$x > 8, x \in Z$"
$\sim (p \wedge q)$ = "No es verdad que 2 es divisor de 6 y es primo"
$\sim (p \vee q)$ = "No es verdad que 8 es número impar o es compuesto"

4 Sean las proposiciones:

p = "30 es múltiplo de 10"
q = "30 es múltiplo de 5"

La implicación entre las proposiciones es:

$p \Rightarrow q$ = "Si 30 es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5"

5 Sean las proposiciones:

p = "China está en Asia"
q = "Cuba está en América"

La doble implicación entre las proposiciones es:

$p \Leftrightarrow q$ = "China está en Asia si y sólo si Cuba está en América"

EJERCICIO 12

Sean las siguientes proposiciones:

p = "España está en Europa"
q = "Japón está en Asia"

Escribe las siguientes proposiciones:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\sim p$
4. $\sim q$
5. $p \Rightarrow q$
6. $p \Leftrightarrow q$
7. $\sim p \wedge q$
8. $p \vee \sim q$
9. $\sim (p \vee q)$
10. $\sim (p \wedge q)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

La representación de una proposición simple o compuesta se ilustra con los siguientes ejemplos:

Ejemplos

Sean los siguientes enunciados:

p = "9 es múltiplo de 3"
q = "5 es divisor de 10"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. 9 es múltiplo de 3 y 5 es divisor de 10

$$p \wedge q$$

2. No es verdad que 5 es divisor de 10

$$\sim q$$

3. 5 es divisor de 10 o no es verdad que 9 es múltiplo de 3

$$p \vee \sim q$$

EJERCICIO 13

Sean las siguientes proposiciones:

a = "La guacamaya es un ave"
b = "A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. La guacamaya es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
2. La guacamaya es un ave y a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
3. La guacamaya no es un ave o a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
4. A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones o la guacamaya es un ave
5. La guacamaya no es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
6. No es verdad que la guacamaya es un ave y que a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Leyes de De Morgan

La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

La negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim (p \vee q) = \sim p \vee \sim q$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Niega la siguiente proposición:
a = "4 es número par o Japón está en Asia"

Solución

$\sim a$ = "4 no es número par y Japón no está en Asia"

2 Niega la proposición:
b = "La guacamaya es un ave y el delfín es un mamífero"

Solución

$\sim b$ = "La guacamaya no es un ave o el delfín no es un mamífero"

3 Niega la proposición:
c = "El león es un mamífero y el tiburón no es un pez"

Solución

$\sim c$ = "El león no es un mamífero o el tiburón es un pez"

EJERCICIO 14

Niega las siguientes proposiciones compuestas:

1. a = "España está en Europa o 6 es número par"
2. b = "Los perros ladran y 12 es múltiplo de 3"
3. c = "5 es un número par y no es múltiplo de 15"
4. d = "7 no es primo o es divisor de 21"
5. e = "6 no es número impar y el tucán no es un ave"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Proposiciones condicionales

Conversa de la implicación. Si $p \Rightarrow q$, la conversa se define como $q \Rightarrow p$.

Ejemplo

Hallar la conversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

Solución

La conversa de la proposición es:

$q \Rightarrow p$ = "Si un volcán está en América, entonces está en Perú"

Contrapositiva de una implicación. Si $p \Rightarrow q$, la contrapositiva se define como $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Ejemplo

Determina la contrapositiva de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

Solución

La contrapositiva de la proposición es:

$\sim q \Rightarrow \sim p$ = "Si un volcán no está en América, entonces no está en Perú"

Inversa de una implicación. Si $p \Rightarrow q$, la inversa se define como $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Ejemplo

Determina la inversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si 8 es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2"

Solución

La inversa de la proposición es:

$\sim p \Rightarrow \sim q$ = "Si 8 no es múltiplo de 4, entonces no es múltiplo de 2"

EJERCICIO 15

Determina la conversa, contrapositiva e inversa de las siguientes implicaciones:

1. $p \Rightarrow q$ = "Si 3 es divisor de 6, entonces no es par"
2. $p \Rightarrow q$ = "Si x es múltiplo de 5, entonces es divisor de 25"
3. $p \Rightarrow q$ = "Si un triángulo es un polígono, entonces no es un cuadrilátero"
4. $p \Rightarrow q$ = "Si Marte no es un planeta, entonces la Luna es un satélite"
5. $p \Rightarrow q$ = "Si 17 es un número primo, entonces no es múltiplo de 50"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación de proposiciones abiertas con conjuntos

Proposición abierta. Es aquélla en la que el sujeto es una variable. Toda proposición abierta representa un conjunto, que recibe el nombre de conjunto solución de la proposición.

Ejemplo

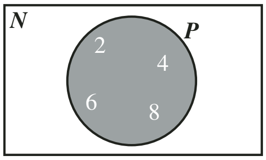
Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:
p = "x es un número par menor que 10"; $x \in N$

Solución

Conjunto solución:

$$P = \{\ 2, 4, 6, 8\ \}$$

Diagrama de Venn



Conjunción. La conjunción se relaciona con la intersección de conjuntos.

Ejemplo

Determina y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$p = \text{“}x \text{ es primo y } x \leq 7\text{”};\ x \in N$$

Solución

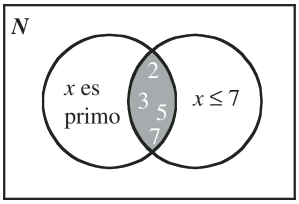
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$P = \{\ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots\ \} \cap \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$P = \{\ 2, 3, 5, 7\ \}$$

Diagrama de Venn



Disyunción. La disyunción se relaciona con la unión de conjuntos.

Ejemplo

Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$q = \text{“}x \text{ es par menor que 10 o } x < 6\text{”};\ x \in N$$

Solución

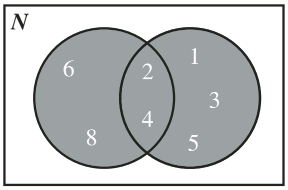
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$Q = \{\ 2, 4, 6, 8\ \} \cup \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$$

El conjunto solución es:

$$Q = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\ \}$$

Diagrama de Venn



Negación. La negación se relaciona con el complemento de un conjunto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el conjunto solución y el diagrama de Venn de cada una de las siguientes proposiciones?

$a = \text{“}x \text{ es un dígito par”}$ $\qquad \sim a = \text{“}x \text{ no es un dígito par”}$

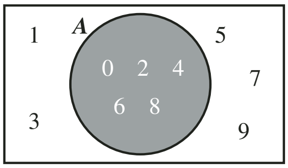
Solución

El conjunto solución de la proposición a, es: $A = \{\ 0, 2, 4, 6, 8\ \}$

(*continúa*)

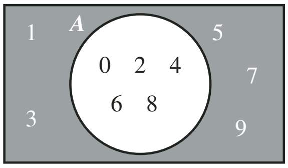
(*continuación*)

Diagrama de Venn



El conjunto solución de la proposición $\sim a$, es: $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Diagrama de Venn



2 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
a = "x es primo menor que 15 o x es divisor de 15"; $x \in N$

Solución

$$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \} \cup \{ 1, 3, 5, 15 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$A = \{ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15 \}$$

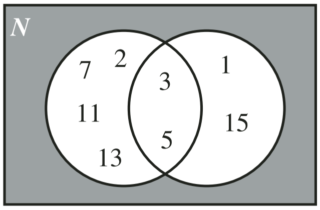
La negación de la proposición es:

$\sim a$ = "x no es primo menor que 15 y x no es divisor de 15"

El conjunto solución es:

$$A' = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots \}$$

Diagrama de Venn



3 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
b = "x es divisor de 6 y x es par menor que 10"; $x \in N$

Solución

$$B = \{ 1, 2, 3, 6 \} \cap \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$B = \{ 2, 6 \}$$

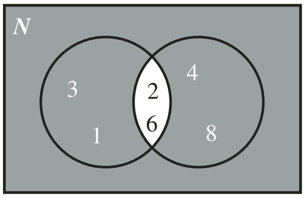
La negación de la proposición es:

$$\sim b = \text{“}x \text{ no es divisor de 6 o } x \text{ no es par menor que 10”}; \; x \in N$$

El conjunto solución es:

$$A' = \{\ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, \dots\ \}$$

Diagrama de Venn



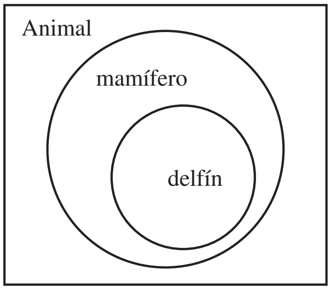
Implicación. La implicación se relaciona con el subconjunto de un conjunto.

Ejemplo

Representa en un diagrama de Venn la siguiente proposición:

a = “si un animal es un delfín, entonces es un mamífero”

Solución



EJERCICIO 16

Determina el conjunto solución y diagrama de Venn de las siguientes proposiciones:

1. a = “x es par y $x < 10$”; $x \in N$
2. b = “x es par menor que 12 y $x \leq 5$”; $x \in N$
3. c = “x es múltiplo de 3 o $x < 8$”; $x \in N$
4. d = “x es primo menor que 11 o x es par menor que 10”; $x \in N$

Representa en un diagrama de Venn las siguientes implicaciones:

5. e = “Si un ciudadano es duranguense, entonces es mexicano”
6. f = “Si un número real es primo, entonces es entero”

En las siguientes proposiciones determina la negación y represéntala en un diagrama de Venn.

7. g = "$x \leq 7$"; $x \in$ N
8. h = "x es par o $x < 8$"; $x \in N$
9. i = "$x \geq 4$ y x es par"; $x \in N$
10. j = "$x \leq 5$ y x es primo"; $x \in N$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo proposicional

Cuando una proposición se construye a partir de otras proposiciones, mediante conectivos lógicos, el valor de verdad lo determinan los valores de verdad de las proposiciones originales.

Dadas las proposiciones p y q, los valores de verdad de las proposiciones $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ y $\sim p$, los determinan los valores de verdad de p y q.

El número de valores de verdad está dado por 2^n donde n representa el número de proposiciones.

Para verificar el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan las siguientes tablas.

Tabla de verdad para la disyunción

La disyunción es verdadera, si una o las dos proposiciones z son verdaderas.

p	q	$p \vee q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{v}$
f	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	$\boldsymbol{f}$

Tabla de verdad para la conjunción

La conjunción es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{f}$
f	f	$\boldsymbol{f}$

Tabla de verdad para la implicación

La implicación es falsa, si la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	$\boldsymbol{v}$

Tabla de verdad para la doble implicación

La doble implicación es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas o las dos son falsas.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{f}$
f	f	$\boldsymbol{v}$

Tabla de verdad para la negación

En la negación de una proposición, su valor de verdad es el contrario del original.

p	$\sim p$
v	$\boldsymbol{f}$
f	$\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{v}$ = Verdadero
$\boldsymbol{f}$ = Falso

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye una tabla de verdad y determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

a = "3 es divisor de 15 o 3 es múltiplo de 2"

Solución

Se hallan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "3 es divisor de 15" **v**

q = "3 es múltiplo de 2" **f**

Se construye la tabla de verdad para la disyunción ya que el conectivo lógico es "o".

p	q	$p \vee q$
v	f	**v**

Finalmente, el valor de verdad para la proposición "a" es verdadero (**v**).

2 Determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

b = "15 no es múltiplo de 3 y 3 es primo"

Solución

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "15 no es múltiplo de 3" **f**

q = "3 es primo" **v**

Se construye la tabla de verdad para la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
f	v	**f**

Finalmente, el valor de verdad para la proposición es falso (**f**).

3 Encuentra el valor de verdad de la siguiente proposición:

c = "Si 2 es número par, entonces 4 es divisor de 10"

Solución

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "2 es número par" **v**

q = "4 es divisor de 10" **f**

Se construye la tabla de verdad para la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
v	f	**f**

Por consiguiente, el valor de verdad para la proposición es falso (**f**).

EJERCICIO 17

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. a = "4 es número par y 5 es múltiplo de 2"
2. b = "La víbora no es un reptil o el canario es un pez"
3. c = "Si 21 es múltiplo de 7, entonces 21 es múltiplo de 2"
4. d = "La guacamaya es un pez si y sólo si el tiburón es un ave"
5. e = "Si el oro es un metal, entonces es un buen conductor de la electricidad"
6. b = "3 es divisor de 18 o 18 es múltiplo de 24"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Construcción de las tablas de verdad

Una tabla de verdad se construye paso a paso, al establecer los valores correspondientes de cada suboperación involucrada, hasta llegar a la expresión dada.

Después de construir una tabla de verdad, el resultado puede ser una tautología, una contradicción o una contingencia. Analicemos estos conceptos:

Tautología. Proposición compuesta en la que todas las combinaciones de valores son verdaderas.

Contradicción. Proposición compuesta en la cual todas las combinaciones de valores son falsas.

Contingencia. Proposición compuesta en donde las combinaciones de valores son verdaderas y falsas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye la tabla de verdad para $p \wedge \sim q$ y realiza una conclusión.

Solución

El número de proposiciones es 2, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^2 = 4$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se determina la negación de la proposición q. Finalmente la conjunción se realiza tomando la proposición p y la negación de q antes obtenida.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
v	v	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	v	$\boldsymbol{f}$

Se concluye que la tabla de valores de verdad es una contingencia.

2 Construye y da una conclusión de la tabla de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

Solución

Primero se encuentra la conjunción de p y q, después se determina la disyunción de p y q.
Por último se realiza la implicación de la conjunción y la disyunción antes obtenida.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
v	v	v	v	**v**
v	f	f	v	**v**
f	v	f	v	**v**
f	f	f	f	**v**

Se concluye que la tabla de verdad construida es una tautología.

3 Realiza una tabla de verdad y verifica si la siguiente proposición $(p \wedge q) \wedge \sim p$ es una contradicción.

Solución

Primero se realiza la conjunción de las proposiciones p y q, simultáneamente se niega la proposición q, finalmente se determina la conjunción de los valores de la primera conjunción con la negación de p.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
v	v	v	f	**f**
v	f	f	f	**f**
f	v	f	v	**f**
f	f	f	v	**f**

La proposición resultó falsa para todos los valores, por consiguiente, es una contradicción.

4 Construye la tabla de verdad para $p \vee (q \wedge r)$.

Solución

El número de proposiciones es 3, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^3 = 8$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se encuentran los valores de verdad de la conjunción de las proposiciones q y r, finalmente se determina la disyunción de la proposición p con la conjunción antes determinada.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
v	v	v	v	**v**
v	v	f	f	**v**
v	f	v	f	**v**
v	f	f	f	**v**
f	v	v	v	**v**
f	v	f	f	**f**
f	f	v	f	**f**
f	f	f	f	**f**

Finalmente, la tabla indica que se trata de una contingencia.

5 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim q$.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
v	v	f	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	f	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	v	f	$\boldsymbol{v}$
f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$

Los valores de verdad de la tabla indican que es una contingencia.

6 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)$.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)$
v	v	f	v	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	f	f	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	v	v	f	$\boldsymbol{v}$
f	f	v	v	f	$\boldsymbol{v}$

La tabla es una contingencia.

7 Verifica si la siguiente proposición es tautología $p \vee (\sim p \vee q)$.

Solución

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \vee (\sim p \vee q)$
v	v	f	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	f	f	$\boldsymbol{v}$
f	v	v	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por tanto, es tautología.

8 Verifica si la siguiente proposición es tautología $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Solución

p	q	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
v	v	v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	f	f	$\boldsymbol{v}$
f	v	f	f	$\boldsymbol{v}$
f	f	f	v	$\boldsymbol{v}$

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por consiguiente, es tautología.

9 Construye la tabla de verdad para $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \Leftrightarrow p)$.

Solución

p	q	$p \wedge q$	$q \Leftrightarrow p$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (q \Leftrightarrow p)$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \Leftrightarrow p)$
v	v	v	v	f	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	f	v	v	f	$\boldsymbol{v}$

La tabla es una contingencia.

EJERCICIO 18

Construye la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

1. $p \vee \sim q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \Rightarrow \sim q$
4. $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
5. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
6. $(p \vee q) \wedge \sim (p \Rightarrow q)$
7. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
8. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
9. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim (p \vee q)$
10. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11. $\sim p \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Producto cartesiano de conjuntos

Dados 2 conjuntos A y B no vacíos, el producto cartesiano es el conjunto $(A \times B)$ que contiene a todas las parejas ordenadas, cuyo primer elemento pertenece al conjunto A y su segundo elemento pertenece al conjunto B.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, determina $A \times B$.

Solución

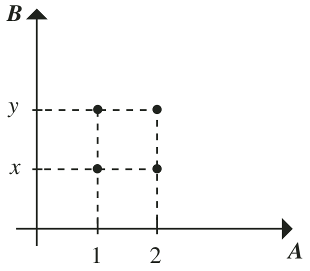
Se asocia a cada uno de los elementos del primer conjunto, con todos los elementos del segundo conjunto:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

(continúa)

(*continuación*)

Representación gráfica:



La representación gráfica también se conoce como diagrama sagital.

2 Si $A = \{ 1, 2 \}$ y $B = \{ 2, 3, 4 \}$ y $C = \{ 3, 4, 6 \}$, halla $(A \cup B) \times (B \cap C)$

Solución

Se halla el conjunto solución de las operaciones indicadas y posteriormente se realiza el producto cartesiano:

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$B \cap C = \{ 3, 4 \}$

$$(A \cup B) \times (B \cap C) = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4) \}$$

3 Si $M = \{ a, b, c \}$, $N = \{ 1, 2, 3 \}$ y $Q = \{ x, y \}$, encuentra $M \times N \times Q$

Solución

El producto cartesiano $M \times N \times Q$ se define como:

$$M \times N \times Q = \{ (m, n, q) \mid m \in M,\ n \in N \text{ y } q \in Q \}$$

Entonces:

$$M \times N \times Q = \begin{Bmatrix} (a, 1, x), (a, 1, y), (a, 2, x), (a, 2, y), (a, 3, x), (a, 3, y) \\ (b, 1, x), (b, 1, y), (b, 2, x), (b, 2, y), (b, 3, x), (b, 3, y) \\ (c, 1, x), (c, 1, y), (c, 2, x), (c, 2, y), (c, 3, x), (c, 3, y) \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO 19

Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 5, 6\}$

Realiza los siguientes productos cartesianos y verifica que el resultado del inciso 6 es igual al obtenido en el inciso 7:

1. $A \times B$
2. $A \times C$
3. $B \times C$
4. $B \times A$
5. $C \times B$
6. $A \times (B \times C)$
7. $(A \times B) \times C$
8. $(A \cup B) \times (A \cap C)$
9. $(A - B) \times C$
10. $(A - C) \times (A \cap C)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 2

Conceptos básicos de álgebra

Reseña HISTÓRICA

al-Khwarizmi

Matemático árabe, conocido como el padre del álgebra.

Sus obras incursionan en las ramas de las matemáticas, astrología, astronomía, geografía e historia. Una de sus obras importantes por su contenido algebraico es la que lleva por título *Hisab al-gabr wa'lmuqqabala*, considerada uno de los primeros libros de álgebra.

Es el autor de uno de los métodos geométricos más antiguos para resolver ecuaciones de segundo grado, el cual se conoce como completar cuadrado.

En las ecuaciones llamaba "cosa" (*xay* en castellano) a la incógnita, a él se debe que se utilice la letra "*x*" para representarla.

Sello ruso dedicado a al-Khwarizmi
(780-850 d.C.)

Álgebra

Rama de las matemáticas que trata a las cantidades de manera general.

Expresiones algebraicas

Se conoce así a la combinación de números reales (*constantes*) y literales o letras (*variables*) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etcétera.

Ejemplos

$3a + 2b - 5$, en esta expresión son constantes 3, 2, -5 y las variables son a y b.
$(z^2 + 8)(5z^4 - 7)$, en esta expresión son constantes 8, 5 y -7, variable "z" y 2, 4 exponentes.

Término algebraico. Es un sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad. A todo término algebraico se le denomina *monomio* y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Ejemplos

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^3$	-8	y	3
$\frac{1}{3}mn^x$	$\frac{1}{3}$	m, n	$1, x$
$-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	$2x + 1$	-2

Términos semejantes. Dos o más términos son semejantes cuando los mismos exponentes afectan a las mismas bases.

Ejemplos

Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus respectivos exponentes iguales, por lo consiguiente son semejantes.

$-7b$ con $4b$ $\qquad$ $-8x^2y^3$ con $7x^2y^3$ $\qquad$ $\frac{1}{6}abc^2$ con abc^2

Reducción de términos semejantes

Para simplificar expresiones que involucren términos semejantes, se suman o restan los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la expresión $-7a + 3a$.

Solución

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación que da como resultado:

$$-7a + 3a = (-7 + 3)a = -4a$$

2 ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión $-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2$?

Solución

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2 = (-6 + 9 - 1)xy^2 = 2xy^2$$

Por consiguiente, el resultado de la simplificación es: $2xy^2$

3 Reduce la expresión $-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b$.

Solución

Se efectúa el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b = (-10+5-6+11)x^{2a}y^b = 0x^{2a}y^b = 0$$

El resultado es igual a 0

4 Simplifica la expresión $7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z$.

Solución

Se agrupan los términos semejantes:

$$7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z = 7x - 12x - 3y + 5y - 8y + 4z + 2z - 3z$$

Se realiza la reducción:

$$= (7 - 12)x + (-3 + 5 - 8)y + (4 + 2 - 3)z$$
$$= -5x - 6y + 3z$$

Por tanto, el resultado es: $-5x - 6y + 3z$

5 Simplifica $0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$.

Solución

Se expresan los decimales en fracciones, se agrupan y simplifican los términos semejantes.

$$0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b = \frac{1}{2}a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + \frac{3}{4}ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$$
$$= \frac{1}{2}a^3b - 5a^3b - \frac{2}{3}a^3b - 3ab^3 + \frac{3}{4}ab^3$$
$$= \left(\frac{1}{2} - 5 - \frac{2}{3}\right)a^3b + \left(-3 + \frac{3}{4}\right)ab^3$$
$$= -\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$$

Entonces, el resultado es: $-\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$

EJERCICIO **20**

Simplifica:

1. $3x - 8x$
2. $6a^2b + 7a^2b$
3. $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$
4. $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$
5. $-2a^2b + 12a^2b$
6. $-3a + 5a - 10a$
7. $4x - 3x - 2x$
8. $7ab + 4ab - 3ab$

9. $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$

10. $-m + n + m + n$

11. $\frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$

12. $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1}$

13. $0.25b - 0.4b + 0.2b$

14. $\frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$

15. $4m^{x-2} - 10m^{x-2} + 3m^{x-2}$

16. $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$

17. $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$

18. $-12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$

19. $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$

20. $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c$

21. $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$

22. $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$

23. $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$

24. $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$

25. $-\frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3a^2 - \frac{1}{2}ab$

26. $\frac{2}{3}x^{m-1} - \frac{1}{10}b^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{3}{4}b^{m-2} - 4x^{m-1}$

27. $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y entonces se realizan las operaciones indicadas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor numérico de la expresión: $x^4y^2z^3$; si $x = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4y^2z^3 = (4)^4(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2\,304}{8} = 288$$

Entonces, el resultado es: 288

2 ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}$; $x=2, y=\frac{1}{4}$?

Solución

Al seguir los pasos del ejemplo anterior, se obtiene:

$$\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}=\frac{5(2)^2}{3}-\frac{2(2)\left(\frac{1}{4}\right)}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{3(2)}=\frac{5(4)}{3}-\frac{\frac{4}{4}}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{6}$$
$$=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}$$
$$=\frac{800-24+5}{120}=\frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: $\frac{781}{120}$

3 Encuentra el valor numérico de $3m^2-2mn+n^2p$; si $m=-3$, $n=4$, $p=-5$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores en la expresión y se realizan las operaciones:

$$3m^2-2mn+n^2p=3(-3)^2-2(-3)(4)+(4)^2(-5)$$
$$=3(9)-2(-3)(4)+(16)(-5)$$
$$=27+24-80$$
$$=-29$$

Por consiguiente, el valor numérico es: -29

EJERCICIO 21

Encuentra el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones si:

$$m=-2,\ n=3,\ p=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{3},\ y=10,\ z=\frac{1}{2}$$

1. $2m+n$
2. $m-n+y$
3. $8p+3x$
4. $\frac{2z+6x}{n}$
5. $5m-2n+3y$
6. $x+z-p$
7. $\frac{3x+4z-9}{n}$
8. $\frac{m}{n}\left(\frac{y}{2}+m+6\right)$
9. $\frac{m^2+n^2+1}{p+x}$
10. $\left(\frac{z-x}{2m+n}\right)^2$
11. $p^2+2px+x^2$
12. $m^2-3mn+n^2$
13. $\frac{p}{x}-\frac{y}{z}+3$
14. $\frac{m^2}{2}-\frac{n^2}{3}+\frac{y^2}{4}$
15. $\frac{mn}{z}+\frac{mp}{x}-\frac{np}{m}$
16. $\frac{9x^2}{3}-\frac{8z^2}{2}+3$
17. $2\sqrt{p}-\sqrt{\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{24}{5}xy}$
18. $\frac{m-p}{n}-\frac{n+x}{m}$
19. $\frac{8p-z}{2n}-\frac{12x-m}{z}+\frac{2}{x}$
20. $\frac{m^n}{32}-p^n+z^n$
21. $(m-n)(p-x)$
22. $(6x-2p)(3m^2-z^3)$
23. $\frac{2(p-x)}{z}\div\frac{m^2+n^2}{p}$
24. $3(p-x)^m$
25. $\frac{5\sqrt{m^2n^2}}{2}+\frac{3\sqrt{6+y}}{4}-3\sqrt{p}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común en términos algebraicos.

Ejemplos

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
1. Un número cualquiera.	m
2. Un número cualquiera aumentado en siete.	$j+7$
3. La diferencia de dos números cualesquiera.	$f-q$
4. El doble de un número excedido en cinco.	$2x+5$
5. La división de un número entero entre su antecesor.	$\frac{x}{x-1}$
6. La mitad de un número.	$\frac{d}{2}$
7. El cuadrado de un número.	y^2
8. La semisuma de dos números.	$\frac{b+c}{2}$
9. Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	$\frac{2}{3}(x-5)=12$
10. Tres números naturales consecutivos.	$x,\ x+1,\ x+2$
11. La parte mayor de 1 200, si la menor es w.	$1\,200-w$
12. El cuadrado de un número aumentado en siete.	b^2+7
13. Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	$\frac{3}{5}p+\frac{1}{2}(p+1)=3$
14. La raíz cuadrada de la diferencia de dos cantidades.	$\sqrt{a-b}$
15. El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	$x(x-1)=30$
16. El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	x^3+3x^2

EJERCICIO 22

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

1. Un número disminuido en tres.
2. El triple de un número excedido en ocho.
3. El cociente de dos números cualesquiera.
4. La parte mayor de 100 si la parte menor es x.
5. Dos números enteros consecutivos.
6. Tres números enteros pares consecutivos.
7. El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera.
8. La suma de los cuadrados de dos números cualesquiera.
9. El recíproco de un número.
10. La raíz cúbica de la diferencia de dos números cualesquiera.
11. La suma de las raíces cuadradas de dos números cualesquiera.

12. Diez unidades menos que cinco veces un número.
13. La sexta parte de la suma de dos números.
14. La suma de tres números pares consecutivos es igual al triple del menor, más las tres cuartas partes del mayor.
15. Un número de dos cifras, cuyo dígito de las decenas es el doble del de las unidades.
16. La cuarta parte del producto de tres números cualesquiera menos 4.
17. El cuadrado de la suma de dos números es igual a 49.
18. El área de un cuadrado de lado x unidades.
19. El perímetro de un rectángulo, si se sabe que el largo es tres veces su ancho.
20. El perímetro de un triángulo rectángulo, si se sabe que el cateto mayor mide tres unidades más que el cateto menor y que la hipotenusa es dos unidades mayor que el cateto mayor.
21. El precio de un artículo disminuido en su 15%.
22. El exceso de 50 sobre el doble de un número.
23. Dos números cuya suma sea 80.
24. Tres números impares consecutivos.
25. El área de un rectángulo, si se sabe que su largo mide tres unidades menos que el triple de su ancho.
26. La edad de una persona hace 10 años.
27. El exceso del cubo de un número sobre la mitad del mismo.
28. Los ángulos de un triángulo, si el primero es el doble del segundo.
29. La cantidad de alcohol en un recipiente de x litros de una mezcla si la concentración de alcohol es 30%.
30. La edad de Alberto si tiene cuatro años más que el doble de la edad de Patricia.
31. Las dos terceras partes de un número, más el triple de su consecutivo, menos su recíproco equivale a 10.
32. El doble de un número equivale al triple de su antecesor excedido en siete.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dada una expresión algebraica, se representa en lenguaje común de la siguiente manera:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en lenguaje común la expresión: $3x - 8$.

Solución

Primero se expresa la multiplicación y posteriormente la diferencia.

$$3x - 8 = \text{el triple de un número disminuido en ocho}$$

2 Expresa $2x + x^2$ en lenguaje común.

Solución

La expresión queda de la siguiente manera:

$$2x + x^2 = \text{la suma del doble de un número y su cuadrado}$$

Otra forma de representar en lenguaje común la misma expresión es:

$$2x + x^2 = \text{doble de un número aumentado en su cuadrado.}$$

3 Expresa en lenguaje común $\frac{2}{9}x - 1 = \frac{4}{3}$.

Solución

Una manera de la expresión en lenguaje común es:

Dos novenos de un número disminuido en la unidad equivalen a cuatro tercios.

EJERCICIO 23

Cambia las siguientes expresiones algebraicas a lenguaje común:

1. $x + 3$
2. $2a - 11$
3. $3x^2$
4. $\frac{5}{6}a$
5. $\frac{1}{x}$
6. $(a+b)^2$
7. $x^3 + y^3$
8. $\frac{c}{c+1}$
9. $5x = 30$
10. $3y - 2 = 25$
11. $\frac{3}{4}z + 2 = z$
12. $\frac{1}{6}(x-y) + 3 = x + y$
13. $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}(x-y)$
14. $x^2 - y^2$
15. $x^2 - 2x$
16. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
17. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
18. $x^2 + (x+1)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomios

Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

Suma

En la suma los polinomios se escriben uno seguido del otro y se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS

1 Suma los siguientes polinomios: $5x^3 - 3x^2 - 6x - 4$; $-8x^3 + 2x^2 - 3$; $7x^2 - 9x + 1$.

Solución

Los polinomios se escriben de la siguiente forma y se realiza la reducción de términos semejantes:

$$(5x^3 - 3x^2 - 6x - 4) + (-8x^3 + 2x^2 - 3) + (7x^2 - 9x + 1) = -3x^3 + 6x^2 - 15x - 6$$

Por tanto, el resultado es: $-3x^3 + 6x^2 - 15x - 6$

2 Efectúa la siguiente operación: $(2x - 7y - 3z + 6) + (-9x + 4z) + (-x + 4y + z - 8)$.

Solución

Con un fin más práctico, se ordenan los polinomios haciendo coincidir los términos semejantes en columnas; asimismo, se reducen los coeficientes término a término.

$$\begin{array}{r} 2x - 7y - 3z + 6 \\ + \;\; -9x \qquad\;\; + 4z \qquad \\ -\;\; x + 4y + \;\; z - 8 \\ \hline -8x - 3y + 2z - 2 \end{array}$$

El resultado de la suma es: $-8x - 3y + 2z - 2$

3 Realiza la siguiente operación: $\left(\frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4}\right)$.

Solución

Se acomodan en forma vertical los términos semejantes y se realiza la operación columna por columna:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6} \\ + \quad \frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4} \\ \hline 2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12} \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12}$

EJERCICIO 24

Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
3. Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
6. $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7. $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
8. Realiza $(5x^2 - 5x + 6) + (2x^2 - 7x + 4) + (-6x^2 + 10x - 10)$
9. Suma $y^3 - y$; $2y^2 - 5y + 7$; $4y^3 - 5y^2 + 3y - 8$
10. ¿Cuál es el resultado de sumar $8z^3 - 9$; $-4z^3 + 2z^2 + 6$; $5z^2 - 2z^3 - 7z + 2$?
11. Efectúa la suma de $4x^2 - 10xy - 12y^2$; $3y^2 - 10x^2 + 5xy$; $8xy - 3x^2 - 2y^2$
12. Realiza $(x^5 - 3x) + (x^4 + 6x^2) + (-x^3 - 2)$
13. ¿Cuál es el resultado de la suma de $-15x^3y - 3x^2y^2 - 6xy^3$; $-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3$?
14. Suma $x^4 - y^4$; $-x^3y + x^2y^2 - xy^3$; $3x^4 + 5x^3y - 4x^2y^2$; $-4x^3y + 3x^2y^2 - 3y^4$
15. Realiza $(3a^6 - 4a^7) + (7a^4 + 6a^2) + (-3a^2 + 7a) + (-a^4 - 4a^2)$

16. Suma los polinomios $\frac{5}{2}x^2-5xy+\frac{2}{3}y^2;\ -\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}xy-\frac{1}{4}y^2;\ -2x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{3}{4}y^2$

17. Efectúa $\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{8}b^2-\frac{1}{2}ab\right)+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{5}{6}ab\right)+\left(-\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{4}ab+\frac{5}{6}a^2\right)$

18. Suma los polinomios $\frac{1}{6}x^2y-\frac{3}{5}y^3+\frac{1}{8}xy^2;\ x^3-\frac{1}{2}x^2y-y^3;\ \frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}xy^2-\frac{2}{5}y^3$

19. Efectúa $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x^3-2y\right)+\left(-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$

20. Suma $x^5-y^5;\ \frac{1}{10}x^3y^2-\frac{3}{4}xy^4-\frac{1}{6}y^5;\ \frac{3}{5}x^4y-\frac{5}{6}x^2y^3-\frac{1}{9}y^5;\ 2x^4y-\frac{2}{5}x^3y^2-\frac{1}{3}y^5$

21. $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3+2\right)+\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2-\frac{3}{4}x-1\right)+\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x^2\right)$

22. ¿Cuál es el resultado de sumar $(5a^{3x}-2a^{2x}+7a^x)+(-2a^{3x}+4a^{2x}-6a^x)$?

23. Suma $3x^{2a}-5x^{2a-1}+4x^{2a-2};\ x^{2a}+4x^{2a-1}+x^{2a-2};\ -3x^{2a}-7x^{2a-2};\ x^{2a-1}+3x^{2a-2}$

24. ¿Cuál es el resultado de sumar $\frac{3}{8}b^{2x}-\frac{5}{6}b^x+b$, $-\frac{1}{4}b^{2x}+b^x-\frac{2}{3}b$ y $-b^{2x}+2b$?

25. $\left(\frac{1}{3}x^{1-y}-\frac{5}{4}x^{1-2y}-x^{1-3y}\right)+\left(-\frac{1}{6}x^{1-y}+\frac{2}{3}x^{1-3y}+x^{1-2y}\right)+\left(\frac{1}{2}x^{1-y}+\frac{1}{3}x^{1-2y}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta

En esta operación es importante identificar el minuendo y el sustraendo, para posteriormente realizar la reducción de términos semejantes.

EJEMPLOS

1 Realiza la siguiente operación: $(4a-2b-5c)-(3a-5b-7c)$.

Solución

En este ejemplo $4a-2b-5c$ representa al minuendo y $3a-5b-7c$ al sustraendo. Se suprimen los paréntesis y se procede a efectuar la reducción de términos semejantes.

$$(4a-2b-5c)-(3a-5b-7c)=4a-3a-2b+5b-5c+7c$$
$$=a+3b+2c$$

Por consiguiente, el resultado de la resta es: $a+3b+2c$

2 De $16x^2-7x-8$ restar $6x^2-3x+6$.

Solución

El minuendo es $16x^2-7x-8$ y el sustraendo es $6x^2+3x-6$, entonces al sustraendo se le cambia el signo $-(6x^2-3x+6)=-6x^2+3x-6$ y se acomodan los polinomios en forma vertical para realizar las operaciones entre los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 16x^2-7x-8 \\ -6x^2+3x-6 \\ \hline 10x^2-4x-14 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $10x^2-4x-14$

3 Resta $-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2$ de $\frac{1}{3}a^3-2b^3+\frac{1}{3}a^2b-ab^2$.

Solución

En este caso el minuendo es $\frac{1}{3}a^3-2b^3+\frac{1}{3}a^2b-ab^2$ y el polinomio sustraendo al cual se cambia el signo y se ordena con respecto a los exponentes es: $-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2$

$$-\left(-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2\right) = -2a^3+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2+6b^3$$

Se acomodan los polinomios y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2b-\ ab^2\ -2b^3 \\ -2a^3+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2+6b^3 \\ \hline -\frac{5}{3}a^3+\frac{13}{12}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+4b^3 \end{array}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{5}{3}a^3+\frac{13}{12}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+4b^3$

EJERCICIO 25

Realiza las siguientes operaciones:

1. De $5a^2-3a+2$ resta $8a^2-5a+7$
2. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3-5x^2-6x+3)-(2x^3+4x-8)$?
3. De $4a^4-10a^3+2a^2-3a-4$ resta $5a^5-3a^3+6a-3$
4. Efectúa $(4x^3y^2-5x^2y^3+6x^4y-8xy^4)-(12x^2y^3-3xy^4+4x^3y^2-9x^4y)$
5. De $7-8a^5b+3a^3b^3-6a^4b^2+2ab^5$ resta $5a^3b^3-3ab^5+8-7a^5b-2a^4b^2$
6. Realiza $(3x^{a+2}-7x^{a+1}-8x^a+3x^{a-1})-(4x^{a+2}+6x^{a+1}-7x^a-9x^{a-1})$
7. De $5a^{2m-1}+6a^{2m}-8a^{m+1}-3a^{m-3}$ resta $12a^{2m}-5a^{2m-1}-3a^{m+1}-4a^{m-3}$
8. ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-6x+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)$?
9. De $\frac{1}{6}m^2n^3+6mn^4+m^4n-\frac{2}{5}m^3n^2$ resta $\frac{1}{3}m^4n+\frac{3}{2}m^2n^3+8mn^4-m^3n^2$
10. De $\frac{2}{5}x^2y^2+3x^3y-4x^4+\frac{1}{6}y^4$ resta $-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^3y+\frac{1}{2}y^4+\frac{2}{3}x^2y^2$
11. Resta $8x-3y-6$ de $5x+4y-1$
12. Realiza $(a^2+a-1)-(a^2-a+1)$
13. Resta $-8x^3+6x^2-3x-2$ de $10x^3-12x^2+2x-1$
14. ¿Cuál es el resultado de restar $12a^4-3a^2+a-8$ de $14a^4-5a^2-3$?
15. Resta $16x^6y^4-3x^3y^2+8x^7y^5$ de $4x^7y^5+9x^3y^2+10x^6y^4$
16. Resta $3m^{x-6}-7m^{x-5}+8m^{x-9}-12m^{x+1}$ de $4m^{x-9}-6m^{x-5}+2m^{x-2}-8m^{x+1}$
17. Resta $15a^{n+10}-3a^{n+1}-8a^{n-3}+10a^n$ de $4a^{n+9}-5a^{n+2}-3a^{n-3}+2a^n$

18. Resta $\frac{1}{3}m-\frac{4}{5}n-p$ de $\frac{5}{6}m-\frac{3}{2}n-\frac{1}{6}p$

19. Resta $\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{6}xy^2+\frac{2}{3}y^3$ de $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}xy^2+\frac{1}{4}y^3$

20. Resta $\frac{1}{2}a^5b-\frac{3}{4}a^3b^3-6a^4b^2$ de $3a^3b^3-8a^5b-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{2}a^2b^4$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Signos de agrupación

Los signos de agrupación se utilizan para indicar que las cantidades en su interior se deben considerar como una sola. Los signos son:

a) Corchetes [ ] *b*) Paréntesis ( ) *c*) Llaves { } *d*) Vínculo $\overline{\quad\quad}$

Reglas para suprimir los signos de agrupación

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "+", éste se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo.

$$+(-a+b-c)=-a+b-c$$

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "–", éste se suprime y cambia el signo de cada una de las cantidades que se encuentren dentro de él.

$$-(x-2y+3z)=-x+2y-3z$$
$$-\overline{2x-3y}=-(2x-3y)=-2x+3y$$

Si en una expresión existen varios signos de agrupación se suprimen aquellos que no contengan otros. Este proceso se repite hasta llegar a una expresión que carezca de signos de agrupación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica $2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$.

Solución

Se suprime el vínculo:

$$2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$$
$$=2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-z-4)]-(-x+y)\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$=2x+\{-[5y+3x-z+2+x-y+z+4]+x-y\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$=2x+\{-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y\}$$

Se suprimen las llaves:

$$=2x-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y$$

Se agrupan y reducen los términos semejantes:

$$=2x-3x-x+x-5y+y-y+z-z-2-4$$
$$=-x-5y-6$$

Por tanto, el resultado es: $-x-5y-6$

2 Simplifica: $\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}$.

Solución

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior:

$$\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-x+y\right]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x+2y-2x+\frac{2}{3}y-x+\frac{1}{4}y-x+y$$
$$=-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$$

Por tanto, el resultado es: $-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$

EJERCICIO 26

Simplifica:

1. $3x - \{2y - (5x + 3y)\}$
2. $-(6a - 3b) - \{5a - 9b - (2c - 9b)\}$
3. $-10x - (8x - 4y + 2z) + (5x - 4y - 2z) - (10x - 3y - 4z)$
4. $4m + \{(6m - 3n) - (9n - 5m) + (8m - 2n)\}$
5. $2a - \{7a - (3a - 7b) + (10a - 9b)\}$
6. $-(x + y) + [3x - 2y + \{-8x - 5y - (6x - 8y - 7y)\} - 6x]$
7. $8x^2 - \{3x^2 - 6y - \overline{2x - 3y} - [9x^2 - 6y - 4x] - (2x^2 - 9y + 6x) - 3x^2\}$
8. $-\{-6x + 3y - (8x - [2y - 4x - \overline{2x - 6y} + 10x] - 9y) + 12x\}$
9. $-9y + 3z - \{5x - 10y - 8z - (2x - 6y + 7z - [2x - 3y])\}$
10. $-6x + \{8y - (2x - [4x - 9y - 6z] - 7x) - 6y\} - (8x - [3y - 2z] - 9y)$
11. $\frac{2}{3}a-\left\{-\frac{1}{5}b-\left(2a-\frac{3}{5}b\right)+\frac{2}{3}a\right\}-\frac{1}{2}b$
12. $4x-\frac{2}{5}x-(3x-y)+\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y-\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y\right)\right\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Para realizar esta operación es conveniente recordar las reglas de los signos.

Regla de los signos

$(+)(+) = +$ $\quad(+)(-) = -$ $\quad(-)(+) = -$ $\quad(-)(-) = +$

Ley de los exponentes para la multiplicación. En la multiplicación de términos con la misma base los exponentes se suman.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Monomio por monomio

Al multiplicar monomios, primero se multiplican los coeficientes y después las bases.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z)$?

Solución

Se multiplican los coeficientes y las bases:

$$(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z) = (-5)(3)\, x^4\, x^2\, y^5\, y^6\, z\, z$$

Se aplican las leyes de los signos y de los exponentes:

$$= -15x^{4+2}y^{5+6}z^{1+1}$$
$$= -15x^6y^{11}z^2$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^6y^{11}z^2$

2 Realiza la siguiente operación: $\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right)$.

Solución

Se efectúa el producto de las fracciones y se aplica la ley de los exponentes para las bases.

$$\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)a^{6+2}b^{5+1}c^{5+4}=\frac{10}{12}a^8b^6c^9=\frac{5}{6}a^8b^6c^9$$

Por consiguiente, el resultado es: $\frac{5}{6}a^8b^6c^9$

3 Realiza $(-abc)(3ac)$.

Solución

En este ejemplo, la base b no se repite en ambos factores, por tanto, se pasa igual en el resultado.

$$(-abc)(3ac) = -3a^{1+1}bc^{1+1} = -3a^2bc^2$$

El resultado de la multiplicación es: $-3a^2bc^2$

4 Realiza $\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right)$.

Solución

Se aplica el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, no importa que los exponentes de las bases sean expresiones algebraicas.

$$\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right) = -6x^{(2a-1)+(4a-3)}y^{3a+2a} = -6x^{6a-4}y^{5a}$$

Por tanto, el resultado es: $-6x^{6a-4}y^{5a}$

5 Efectúa $\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)$.

Solución

$$\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)=(-3)(2)(-5)a^{4+2+1}b^{1+3}c^{1+5+2}=30a^7b^4c^8$$

El resultado del producto es: $30a^7b^4c^8$

EJERCICIO 27

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(5x)(-3x)$
2. $(4x^3y^5z)(6x^5y^4z)$
3. $(-7a^5c^2)(2a^4bc^6)$
4. $\left(\frac{3}{4}xyz\right)\left(-\frac{2}{5}z^4\right)$
5. $\left(-10m^6p\right)\left(-5m^2p^3\right)$
6. $\left(9c^5m^9p^2\right)\left(-\frac{1}{3}c^6m\right)$
7. $(-xyz)(xyz)$
8. $(ac)\left(-4a^3b\right)$
9. $\left(-\frac{3}{5}mn\right)\left(-\frac{5}{3}m^4np\right)$
10. $\left(\frac{7}{4}a^6b^8c^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2b^5c\right)$
11. $\left(-\frac{4}{5}xyz\right)\left(\frac{3}{7}x^2yz^3\right)$
12. $\left(\frac{9}{5}mp^2\right)\left(-15m^6p\right)$
13. $\left(0.5m^6p^5\right)\left(0.2m^2n\right)$
14. $(0.4abc)(0.12xyz)$
15. $(5a^mb^nc)(-2a^2b^3c)$
16. $(6m^{2x+8}n^{4x})(-7m^{x-6}n^5)$
17. $(-9x^{3m}y^{2n-1})(4x^5y^6)$
18. $(-3x^{2a-3}y^{5a+1})(-2x^{3a+1}y^{4a-6})$
19. $\left(-\frac{7}{6}a^{4x-3}b^{2x}c^4\right)\left(-\frac{3}{14}a^{x+1}bc^x\right)$
20. $\left(-\frac{1}{2}x^{4a-1}y^{2a}\right)\left(4x^{2-3a}y^{1-2a}\right)$
21. $(5ab)(-3a^2b)(2a^3bc)$
22. $(-7x^2y^5z)(-2x^6y^2)(-4xyz)$
23. $(-5x)(3y)(-2z)$
24. $(4x^4y)(-2xy^2)(3x^6y)(-2y^4)$
25. $\left(\frac{1}{3}a^3b^2c\right)\left(\frac{2}{5}a^4bc^2\right)(6ac)\left(\frac{10}{3}a^4b^2\right)$
26. $\left(-\frac{3}{4}a^6b\right)\left(\frac{2}{3}a^2bc\right)\left(-\frac{1}{2}ac\right)\left(-2b^2c^2\right)$
27. $(4a^5b^3c)(-5a^{2x}b^xc)(-2a^{4x-1}b^{2x}c^x)$
28. $\left(\frac{1}{4}x^{3a-1}y^{4a}\right)\left(\frac{2}{3}x^{a+2}y^{a+1}\right)\left(-\frac{1}{2}xy^{2a}\right)$
29. $(3x^{3a-1}y)(-4x^{2a}y^{4a})(-2x^{4a-1}y^{2a})$
30. $(2a^{8x}b^6)(-2m^{2x}n^3)(-5a^2m^3n^{5x})$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio por monomio

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio o viceversa, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 Resuelve $(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio:

$$(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)=(5x^5y^4)(-3x^4y)+(-3x^4y^3z)(-3x^4y)+(4xz^4)(-3x^4y)$$
$$=-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$

2 Realiza el siguiente producto: $(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x} - 5a^{3x-2}b^{2x+1} + 3a^{3x-3}b^{2x+2})$.

Solución

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x} - 5a^{3x-2}b^{2x+1} + 3a^{3x-3}b^{2x+2})$$
$$= (-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x}) + (-7a^{x+3}b^{1-2x})(-5a^{3x-2}b^{2x+1}) + (-7a^{x+3}b^{1-2x})(3a^{3x-3}b^{2x+2})$$
$$= -28a^{4x+2}b + 35a^{4x+1}b^2 - 21a^{4x}b^3$$

Luego, el resultado es: $-28a^{4x+2}b + 35a^{4x+1}b^2 - 21a^{4x}b^3$

3 Resuelve el siguiente producto: $\left(\frac{4}{5}x^{m-1} - \frac{2}{3}x^{m-2} + \frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$.

Solución

Se multiplica el monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$\left(\frac{4}{5}x^{m-1} - \frac{2}{3}x^{m-2} + \frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{5}x^{m-1}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right) + \left(-\frac{2}{3}x^{m-2}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right) + \left(\frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$$
$$= -\frac{8}{15}x^{2m} + \frac{4}{9}x^{2m-1} - \frac{1}{2}x^{2m-2}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{8}{15}x^{2m} + \frac{4}{9}x^{2m-1} - \frac{1}{2}x^{2m-2}$

EJERCICIO 28

Realiza los siguientes productos:

1. $(4a^2 - 7ab)(2a^3b)$
2. $(-3m)(5m^4 - 3m^3 + 6m - 3)$
3. $(3x^3 - 7x^2 - 2x)(xy)$
4. $(-3ab)(2a^2 - 7ab + 8b^2)$
5. $(6a^3b^2 - 7a^2b^3 + 4ab^5)(4a^5b^2)$
6. $(-5xy^2z)(7x^6y^2z - 3x^5y - 4xz)$
7. $(5m^3n - 3m^4p + 6m^2)(8mp^3)$
8. $(4a^3c - 7a^2b - 2c)(-3ac^4)$
9. $(5m^6n - 3mn^4 + 2mn)(3m^{x+1}n^{2x})$
10. $(-2x^{a-2})(7x^5 - 8x^2 + 6x^3 - 9x + 2)$
11. $(3a^{2x+1}b^{4x} - 7a^{2x}b^{4x+1} - 4a^xb^{3x+1})(-3a^{x+1}b^{1-x})$
12. $(-5x^{2m}y^{n+1})(5x^{3m}y^{2n} - 2x^{3m+1}y^{2n+1} - 4x^{3m+2}y^{2n+2})$
13. $(3a^{x+2}b^yc^m - 3a^{x+1}b^{y+1}c^2 + 2a^{x-3}b^{y-1}c)(-4a^3b^2c^5)$
14. $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{5}b^2 - \frac{3}{4}ab\right)\left(\frac{2}{3}ab^2\right)$

15. $\left(\frac{4}{3}x^3y\right)\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}y^2+6xy\right)$

16. $\left(\frac{2}{5}a^6-\frac{7}{2}a^4b^2+\frac{8}{5}a^2b^4-\frac{1}{16}b\right)\left(\frac{4}{5}ab^2c\right)$

17. $\left(\frac{4}{5}a^{6m+1}b^{2m}-\frac{7}{2}a^{m+3}c^m\right)\left(-5a^3c^4\right)$

18. $\left(\frac{1}{2}x^{m-3}-\frac{1}{6}x^{m-2}+\frac{1}{4}x^{m-1}\right)\left(-6x^m\right)$

19. $(4ab)\left(\frac{7}{3}a^mb^{3n}c+\frac{4}{5}a^{m-1}b^{3n+2}\right)$

20. $\left(-\frac{4}{5}m^xn^4\right)\left(\frac{4}{3}m^{2x+3}n^{3a}-\frac{5}{4}m^{2x+2}n^{3a-1}-\frac{7}{2}m^{2x}n\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio por polinomio

Para multiplicar polinomios por polinomios, se siguen los pasos indicados en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $(5x^2-3x-2)(4x-3x^2-6)$.

Solución

Se escriben los factores de la multiplicación en forma escalonada (como en las multiplicaciones aritméticas), y se ordenan los polinomios con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente, según se quiera.

$$\begin{array}{r} 5x^2-3x-2 \\ \times\ -3x^2+4x-6 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica el primer término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba.

$$\begin{array}{r} 5x^2-3x\ -2 \\ \times\ -3x^2+4x\ -6 \\ \hline -15x^4+9x^3+6x^2 \end{array}$$

$(-3x^2)(5x^2)=-15x^4$
$(-3x^2)(-3x)=+9x^3$
$(-3x^2)(-2)=+6x^2$

A continuación se multiplica el segundo término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba y los resultados se colocan debajo de sus respectivos términos semejantes del primer resultado.

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & -3x & -2 \\ \times & -3x^2 & +4x & -6 \\ \hline -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & \\ & +20x^3 & -12x^2 & -8x \end{array}$$

$(4x)(5x^2)=20x^3$
$(4x)(-3x)=-12x^2$
$(4x)(-2)=-8x$

Se repite el paso anterior para cada uno de los términos siguientes (si es que existe).

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 & -3x & -2 & \\ \times & -3x^2 & +4x & -6 & \\ \hline -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\ & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \\ & & -30x^2 & +18x & +12 \end{array}$$

$(-6)(5x^2)=-30x^2$
$(-6)(-3x)=18x$
$(-6)(-2)=12$

(*continúa*)

(*continuación*)

Por último, se realiza la suma.

$$\begin{array}{r} 5x^2-3x-2 \\ \times\; -3x^2+4x-6 \\ \hline -15x^4+9x^3+6x^2 \qquad\qquad \\ +20x^3-12x^2-8x \qquad \\ -30x^2+18x+12 \\ \hline -15x^4+29x^3-36x^2+10x+12 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-15x^4+29x^3-36x^2+10x+12$

2 Efectúa la siguiente operación: $(5x^4y-3x^2y^3-6xy)(3x^4y-4x^2y^3+3xy)$.

Solución

Se acomodan los polinomios de manera vertical y se realiza el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r} 5x^4y-3x^2y^3-6xy \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \times\; 3x^4y-4x^2y^3+3xy \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 15x^8y^2-9x^6y^4-18x^5y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ +\quad -20x^6y^4 \qquad\qquad +12x^4y^6+24x^3y^4 \qquad \\ +15x^5y^2 \qquad\quad -9x^3y^4-18x^2y^2 \\ \hline 15x^8y^2-29x^6y^4-3x^5y^2+12x^4y^6+15x^3y^4-18x^2y^2 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $15x^8y^2-29x^6y^4-3x^5y^2+12x^4y^6+15x^3y^4-18x^2y^2$

3 ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{5}{2}m^2-3mn+\frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}n\right)$?

Solución

Este es un producto de un polinomio por un binomio, los resultados de los productos se acomodan de manera horizontal y se realizan las reducciones de términos semejantes.

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{2}m^2-3mn+\frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}n\right)&=\frac{5}{3}m^3-2m^2n+\frac{2}{9}mn^2-\frac{5}{4}m^2n+\frac{3}{2}mn^2-\frac{1}{6}n^3\\&=\frac{5}{3}m^3-\frac{13}{4}m^2n+\frac{31}{18}mn^2-\frac{1}{6}n^3\end{aligned}$$

El resultado de la operación es: $\frac{5}{3}m^3-\frac{13}{4}m^2n+\frac{31}{18}mn^2-\frac{1}{6}n^3$

4 Obtén el resultado de $\left(2x^{a+3}+5x^{a+2}-x^{a+1}+x^{a-2}\right)\left(x^{a+1}+2x^{a}-x^{a-1}\right)$.

Solución

Se acomodan los polinomios verticalmente y en orden decreciente y se obtiene como resultado:

$$\begin{array}{l} 2x^{a+3}+5x^{a+2}-x^{a+1}+x^{a-2} \\ \times\qquad\qquad x^{a+1}+2x^{a}-x^{a-1} \\ \hline 2x^{2a+4}+5x^{2a+3}-x^{2a+2} \qquad\qquad +x^{2a-1} \\ +\qquad +4x^{2a+3}+10x^{2a+2}-2x^{2a+1} \qquad\qquad +2x^{2a-2} \\ \qquad\qquad -2x^{2a+2}-5x^{2a+1}+x^{2a} \qquad\qquad -x^{2a-3} \\ \hline 2x^{2a+4}+9x^{2a+3}+7x^{2a+2}-7x^{2a+1}+x^{2a}+x^{2a-1}+2x^{2a-2}-x^{2a-3} \end{array}$$

EJERCICIO 29

Efectúa los siguientes productos:

1. $(x-7)(x+2)$
2. $(m+9)(m-8)$
3. $(-x+2)(3-x)$
4. $(3x+7)(x+4)$
5. $(2x-5)(3x+2)$
6. $(5x-4y)(5x+4y)$
7. $(3x+2y)(3x-y)$
8. $(n^2+4)(n^2-7)$
9. $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$
10. $\left(\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-3y\right)$
11. $\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}y\right)$
12. $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$
13. $(x^2+2xy+y^2)(x+y)$
14. $(m^2-mn+n^2)(m+n)$
15. $(m^2+mn+n^2)(m-n)$
16. $(5x^2-7y^2-4xy)(3x-2y)$
17. $(4b^2-9a^2-4ab)(3a-7b)$
18. $(2a^3-3a+4)(2a-1)$
19. $(5x^4-3x^2-6)(3x-4)$
20. $(x^2-3x+1)(x^2-1)$
21. $\left(\frac{1}{5}a^2-3ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{7}{2}b\right)$
22. $\left(\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{5}y^2-\frac{3}{4}xy\right)\left(4x-\frac{1}{3}y\right)$
23. $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{5}xy\right)\left(2y-\frac{3}{2}x\right)$
24. $(m^{x-1}-n^{a-1})(m-n)$
25. $(b^m-b^{m+1}+b^{m+2})(b+1)$
26. $(2x^{m+1}+x^{m+2}-x^m)(x^{m+3}-2x^{m+1})$
27. $(x^{a+2}-2x^a+3x^{a+1})(x^a+x^{a+1})$
28. $(3x^2-5x-2)(2x^2-7x+4)$
29. $(4x-6x^2-9)(3x^2+2x+1)$
30. $(4x^3-2x^2y+6xy^2)(x^2y-xy^2-2y^3)$
31. $(m+n-p)(m-p-n)$
32. $(2m-3n+5p)(n+2p-m)$
33. $(a+b-c)(a-b+c)$
34. $(x^2-2x+1)(x^4-2x^2+2)$
35. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)(6x^2-4x-2)$
36. $(x^m+x^{m+1}-x^{m+2})(x^m-x^{m+1}+x^{m+2})$
37. $(2x^{2m+1}+3x^{2m}-x^{2m-1})(x^2+2x+1)$
38. $(a^2b^2-a^3b+a^4-3ab^3+b^4)(a^2-2b^2+ab)$
39. $(3m^{a-2}-2m^{a-1}+m^a)(m^2+2m-1)$
40. $(3x^{2a}+x^{2a+1}-5x^{2a+2})(x^{3a-3}-8x^{3a-2}-6x^{3a-1})$
41. $(m^3-m+m^2+1)(m^2+m^3-2m-1)$
42. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x^2-2+\frac{1}{4}x\right)$
43. $(a^{x+1}-2a^{x+2}-a^{x+3}+a^{x+4})(a^{x-3}-a^{x-1}+a^{x-2})$
44. $(a^{x+3}+4a^{x+1}-5a^{x-1})(a^{x+1}+a^{x+2}+a^{x+3})$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

A continuación se muestra la regla de los signos de esta operación:

Regla de los signos

$(+)\div(+)=+$ $(+)\div(-)=-$ $(-)\div(+)=-$ $(-)\div(-)=+$

Ley de los exponentes para la división

En la división los exponentes de las bases iguales se restan.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Monomio entre monomio

Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases. Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c}$.

Solución

Se dividen los coeficientes y las bases para obtener:

$$\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \frac{-16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$$

Finalmente, el resultado es: $-2a^3bc^5$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c}$?

Solución

La división de los coeficientes no es exacta, por tanto, se deja expresada como fracción, la cual se simplifica y se efectúa la división de las bases.

$$\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c} = \frac{10}{6}x^{7-2}y^{6-2}c^{1-1} = \frac{5}{3}x^5y^4c^0 = \frac{5}{3}x^5y^4$$

Por tanto, el resultado es: $\frac{5}{3}x^5y^4$

3 Realiza $\frac{-xyz}{-xyz}$.

Solución

Se aplica la ley de los signos para la división y se dividen las bases.

$$\frac{-xyz}{-xyz} = x^{1-1}y^{1-1}z^{1-1} = x^0y^0z^0 = (1)(1)(1) = 1$$

El resultado es: 1

4 ¿Cuál es el resultado de $8x^{3a-1}y^{5a-4} \div 2x^{2a+3}y^{3a-1}$?

Solución

Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes para obtener como resultado:

$$\frac{8x^{3a-1}y^{5a-4}}{2x^{2a+3}y^{3a-1}} = 4x^{(3a-1)-(2a+3)}y^{(5a-4)-(3a-1)} = 4x^{3a-1-2a-3}y^{5a-4-3a+1} = 4x^{a-4}y^{2a-3}$$

EJERCICIO 30

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

1. $\frac{9a^6b^{10}}{3a^2b^5}$
2. $\frac{42x^9y^2}{-7x^5y^2}$
3. $\frac{-26a^5b^6}{-13b^3}$
4. $\frac{32p^5q^6}{-8p^3q^2}$
5. $\frac{36a^{10}b^8}{-12a^2b^7}$
6. $\frac{-25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$
7. $\frac{-6x^8y^9}{18x^4y^7}$
8. $\frac{-44a^5b^8}{66a^3b^2}$
9. $\frac{12x^3y^2z^4}{18xy^2z^3}$
10. $\frac{2x^4y^5z}{8x^3y^2}$
11. $\frac{12x^{10a-4}y^{5b-2}}{-6x^{3a+2}y^{2b+1}}$
12. $\frac{-10a^{5n-5}b^{4n+2}}{-2a^{4n+1}b^{2n-5}}$
13. $\frac{48a^{2x+3}b^{3x-2}c^x}{-16a^{x+1}b^{2x-5}c^3}$
14. $\frac{-20x^{5m-2}y^{9n}z^{2m}}{-6x^3y^5z^2}$
15. $\frac{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}$
16. $-\frac{7}{8}a^2b^5c^8 \div -\frac{5}{2}ab^5c^6$
17. $-\frac{3}{5}a^3b \div -\frac{4}{5}a^2b$
18. $\frac{2}{3}xy^5z^3 \div -\frac{1}{6}z^3$
19. $-\frac{7}{8}a^mb^n \div -\frac{3}{4}ab^2$
20. $-\frac{2}{9}x^4y^5 \div -2$
21. $3m^4n^5p^6 \div -\frac{1}{3}m^4np^5$
22. $-\frac{3}{8}c^3d^5 \div \frac{3}{4}d^x$
23. $\frac{3}{2}a^{m-2}b^{n-5} \div \frac{3}{4}a^{m-5}b^{n-7}$
24. $\frac{3}{4}a^{m+1}b^{n+2} \div \frac{2}{3}a^{2-3m}b^{4-n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio entre monomio

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Efectúa $\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$.

Solución

Se divide cada término del polinomio entre el monomio.

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}=\frac{2x^4}{-x^2}-\frac{5x^3}{-x^2}+\frac{x^2}{-x^2}=-2x^{4-2}+5x^{3-2}-x^{2-2}$$
$$=-2x^2+5x-x^0=-2x^2+5x-1$$

2 Determina el cociente de: $\frac{16x^6y^5z-12x^4y^6z^2+6x^3y^9}{-4x^2y}$.

Solución

Al aplicar los pasos del ejemplo anterior se obtiene:

$$\frac{16x^6y^5z}{-4x^2y}-\frac{12x^4y^6z^2}{-4x^2y}+\frac{6x^3y^9}{-4x^2y}=-4x^{6-2}y^{5-1}z+3x^{4-2}y^{6-1}z^2-\frac{3}{2}x^{3-2}y^{9-1}$$
$$=-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$$

El resultado es: $-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$

3 ¿Cuál es el cociente de $\dfrac{4x^{2m+1}+8x^{3m-2}-12x^{m+3}}{6x^{m-2}}$?

Solución

El monomio divide a cada uno de los términos que conforman el polinomio.

$$\frac{4x^{2m+1}}{6x^{m-2}}+\frac{8x^{3m-2}}{6x^{m-2}}-\frac{12x^{m+3}}{6x^{m-2}}=\frac{4}{6}x^{(2m+1)-(m-2)}+\frac{8}{6}x^{(3m-2)-(m-2)}-\frac{12}{6}x^{(m+3)-(m-2)}$$
$$=\frac{2}{3}x^{2m+1-m+2}+\frac{4}{3}x^{3m-2-m+2}-2x^{m+3-m+2}$$
$$=\frac{2}{3}x^{m+3}+\frac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\frac{2}{3}x^{m+3}+\frac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$

EJERCICIO 31

Realiza las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^2+2x}{x}$
2. $\dfrac{4x^3+2x^2}{2x^2}$
3. $\dfrac{8x^2y-20x^3}{4x^2}$
4. $\dfrac{2x^3-x^2+x}{x}$
5. $\dfrac{2x^4+6x^3-8x^2}{2x^2}$
6. $\dfrac{8x^6-10x^4-12x^3}{-4x^2}$
7. $\dfrac{27m^4n^6-15m^3n^6+3mn^2}{3mn^2}$
8. $\dfrac{32a^7b^5+48a^6b^4-a^4b^3}{8ab^3}$
9. $\dfrac{28x^9y^6-49x^7y^3-7x^2y}{7x^2y}$
10. $\left(\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{5}{2}a\right)\div\dfrac{1}{2}a$
11. $\left(\dfrac{1}{5}a^5b^7-\dfrac{1}{4}a^4b^5-a^3b^4\right)\div 6a^3b^2$
12. $\left(\dfrac{1}{4}a^8b^7-\dfrac{3}{2}a^6b^6+\dfrac{1}{6}a^4b^3\right)\div-\dfrac{3}{4}ab^2$
13. $\left(\dfrac{3}{5}x^7y^9-\dfrac{2}{3}x^8y^7+\dfrac{4}{3}x^4y^5\right)\div\dfrac{4}{15}xy^5$
14. $\left(\dfrac{1}{6}x^8y^7-\dfrac{4}{3}x^6y^5+\dfrac{1}{3}x^5y^{10}\right)\div-\dfrac{6}{5}x^4y^3$
15. $\left(\dfrac{1}{2}x^{10}y^8-\dfrac{2}{3}x^8y^7+\dfrac{1}{8}x^5y^6-x^3y^5\right)\div-\dfrac{5}{2}x^2y^3$
16. $\dfrac{a^{2x}b^{3y}c^{4z}+6a^{3x}b^{4y}c^{5z}-8a^{4x}b^{5y}c^{6z}}{\frac{1}{2}a^{2x}b^{3y}c^{4z}}$
17. $\dfrac{x^{2a-1}y^{3a+5}-12x^{a+6}y^{2a-6}}{6x^{a+2}y^{3a-7}}$
18. $\dfrac{16a^{5m-3}b^{7m+1}-12a^{4m+2}b^{6m-5}+8a^{3m-4}b^{5m}}{-4a^{2m-5}b^{4m+1}}$
19. $\dfrac{20a^{6m-4}b^{3n+10}-50a^{7m-2}b^{3n-1}+8a^{5m}b^5}{-10a^{2m+2}b^{2n}}$
20. $\dfrac{\frac{3}{4}x^{2-a}y^{3-b}z^{4-c}+\frac{1}{6}x^{1-a}y^{2-b}z^3-\frac{1}{3}x^{-a}y^{-b}z^4}{\frac{1}{12}x^{2-3a}y^{3-2b}z^{1-c}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio entre otro polinomio

A continuación se enlistan los pasos a seguir para realizar esta operación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\dfrac{3x^2-5x+2}{3x-2}$.

Solución

1. Se colocan los polinomios como en la división con números reales, y se ordenan según convenga con respecto a los exponentes:

$$3x-2\,\overline{)\,3x^2-5x+2}$$

2. Se toma el primer término del dividendo, se divide entre el primer término del divisor y el resultado se coloca en la parte de arriba: $\dfrac{3x^2}{3x}=x$.

$$\begin{array}{r l} & \quad x \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \end{array}$$

3. Se multiplica el resultado de la división por cada uno de los términos del divisor; a cada resultado se le cambia el signo y se acomoda debajo del dividendo con su término semejante: $(x)(3x)=3x^2$; $(x)(-2)=-2x$.

$$\begin{array}{r l} & \quad x \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \\ & \underline{-3x^2+2x} \end{array}$$

4. Se reducen los términos semejantes y se baja el siguiente término del dividendo, a la expresión resultante se le llama primer residuo.

$$\begin{array}{r l} & \quad x \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \end{array}$$

5. Se repite el primer paso, es decir, se divide el primer término del primer residuo que resultó de la reducción anterior entre el primer término del divisor y se escribe el resultado arriba: $\dfrac{-3x}{3x}=-1$.

$$\begin{array}{r l} & \quad x-1 \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \end{array}$$

6. Se multiplica el resultado de la división anterior por cada uno de los términos del divisor y se escribe el resultado debajo de cada término semejante del residuo anterior (no olvides cambiar el signo): $(-1)(3x)=-3x$; $(-1)(-2)=2$.

$$\begin{array}{r l} & \quad x-1 \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \\ & \qquad\ \ 3x-2 \end{array}$$

7. Se realiza la suma y si el residuo es cero como en el ejemplo, la división terminó; en caso contrario, se siguen los pasos anteriores hasta obtener cero como residuo o algún polinomio de grado menor al del divisor.

$$\begin{array}{r l} & \quad x-1 \\ 3x-2 & \overline{)\,3x^2-5x+2} \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \\ & \qquad\ \ \underline{3x-2} \\ & \qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado del cociente es: $x-1$

2 Efectúa la siguiente operación: $\dfrac{5a^2-21b^2+8ab}{a+3b}$.

Solución

Al emplear los pasos del ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} & 5a-7b \\ \hline a+3b & 5a^2+8ab-21b^2 \\ & -5a^2-15ab \\ & -7ab-21b^2 \\ & 7ab+21b^2 \\ & 0 \end{array}$$

$$\frac{5a^2}{a}=5a \rightarrow (5a)(a+3b)=5a^2+15ab$$

$$\frac{-7ab}{a}=-7b \rightarrow (-7b)(a+3b)=-7ab-21b^2$$

Por consiguiente, el cociente es: $5a-7b$

En una división de polinomios, si al dividendo le falta uno de sus términos, se deja indicado el espacio que ocupa dicho término o se escribe con coeficiente 0.

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\dfrac{-2a+a^4-a^2-1}{a+a^2+1}$?

Solución

Se ordena tanto el dividendo como el divisor en orden decreciente con respecto a los exponentes y, en el caso del dividendo, se deja el espacio correspondiente al término de exponente 3:

$$a^2+a+1 \,\overline{\big|\, a^4+0a^3-a^2-2a-1}$$

Se realiza la división como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{r|l} & a^2-a-1 \\ \hline a^2+a+1 & a^4+0a^3-a^2-2a-1 \\ & -a^4-a^3-a^2 \\ & -a^3-2a^2-2a \\ & a^3+a^2+a \\ & -a^2-a-1 \\ & a^2+a+1 \\ & 0 \end{array}$$

$$\frac{a^4}{a^2}=a^2 \rightarrow (a^2)(a^2+a+1)=a^4+a^3+a^2$$

$$\frac{-a^3}{a^2}=-a \rightarrow (-a)(a^2+a+1)=-a^3-a^2-a$$

$$\frac{-a^2}{a^2}=-1 \rightarrow (-1)(a^2+a+1)=-a^2-a-1$$

El resultado de la división es: a^2-a-1

EJERCICIO 32

Determina el cociente de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$
2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$
3. $\dfrac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$
4. $\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}$
5. $\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}$
6. $\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}$

7. $\dfrac{m^2-11mn+28n^2}{m-7n}$

8. $\dfrac{x^2-9xy-10y^2}{x+y}$

9. $\dfrac{n^4+2n^2-48}{n^2+8}$

10. $\dfrac{m^6-m^3-20}{m^3-5}$

11. $\dfrac{x^8+11x^4+18}{x^4+9}$

12. $\dfrac{x^{12}-9x^6+14}{x^6-2}$

13. $\dfrac{9x^2-6x-35}{3x+5}$

14. $\dfrac{16m^2-4m-6}{4m+2}$

15. $\dfrac{15a^2-a-28}{3a+4}$

16. $\dfrac{8a^2-6ab-27b^2}{4a-9b}$

17. $\dfrac{49m^2-56m+15}{7m-5}$

18. $\dfrac{15a^2-ab-28b^2}{5a-7b}$

19. $\dfrac{7m^2-31mn+12n^2}{m-4n}$

20. $\dfrac{12x^2-5xy-2y^2}{4x+y}$

21. $\dfrac{18m^4-21m^2n^2-15n^4}{6m^2+3n^2}$

22. $\dfrac{9m^4-9m^2-40}{3m^2-8}$

23. $\dfrac{20m^6-9m^3-18}{4m^3+3}$

24. $\dfrac{15m^3-34m^2+9m+10}{3m-5}$

25. $\dfrac{12x^3+13x^2-59x+30}{4x-5}$

26. $\dfrac{8a^3-44a^2+44a+42}{4a^2-8a-6}$

27. $\left(x^3-y^3\right)\div\left(x-y\right)$

28. $\left(8x^3+27y^3\right)\div\left(3y+2x\right)$

29. $\left(x^6-8y^6\right)\div\left(x^2-2y^2\right)$

30. $\left(a^4-a\right)\div\left(a-1\right)$

31. $\dfrac{x^3+48x-64-12x^2}{x^2+16-8x}$

32. $\dfrac{4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4}{2x^2-xy-2y^2}$

33. $\dfrac{6x^4-8x^2-x^3+x+2}{2x^2-x-1}$

34. $\dfrac{3x^4+2x^3+3x-6x^2-2}{x^2+x-2}$

35. $\dfrac{4x^4-4x^3-13x^2+11x+4}{2x^2-4+x}$

36. $\dfrac{6x^4-19x^3-12x^2+43x+30}{3x^2-5x-6}$

37. $\dfrac{4a^4+26a^3-79a^2-20a+42}{a^2+8a-6}$

38. $\dfrac{12x^4-36x^3-29x^2+38x+24}{2x^2-5x-6}$

39. $\dfrac{28x^4-17x^3+18x+23x^2-24}{4x^2-3x+6}$

40. $\dfrac{5x^4-9x^3-23x^2+36x+12}{x^2-4}$

41. $\dfrac{12x^4+9x^3-11x^2-6x+2}{3x^2-2}$

42. $\dfrac{10a^4-41a^3b+9a^2b^2+38ab^3+14b^4}{2a-7b}$

43. $\dfrac{8x^6-32x^5+16x^4+19x^3+34x^2+19x-10}{2x-5}$

44. $\left(5a^2-\dfrac{13}{18}ab-\dfrac{2}{3}b^2\right)\div\left(3a-\dfrac{4}{3}b\right)$

45. $\left(\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{203}{75}xy+\dfrac{2}{15}y^2\right)\div\left(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{3}y\right)$

46. $\left(6m^2-\dfrac{3}{2}mn+\dfrac{1}{12}n^2\right)\div\left(\dfrac{3}{2}m-\dfrac{1}{4}n\right)$

47. $\dfrac{\dfrac{5}{8}a^3+\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{17}{18}a-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{5}{2}a^2-\dfrac{2}{3}a-2}$

48. $\left(x^{a+3}+x^a\right)\div\left(x+1\right)$

49. $\dfrac{a^m-ab^{y-1}-a^{m-1}b+b^y}{a-b}$

50. $\dfrac{m^{a+2}-2m^a+m^{a-2}}{m^2+2m+1}$

51. $\dfrac{m^{2x+3}+4m^{2x+2}+m^{2x+1}-2m^{2x}}{m^x+m^{x+1}}$

52. $\dfrac{m^{2x+5}+2m^{2x+4}-3m^{2x+3}-4m^{2x+2}+2m^{2x+1}}{m^{x+3}-2m^{x+1}}$

53. $\dfrac{-30m^{5x+1}+46m^{5x}+5m^{5x-1}-23m^{5x-2}+3m^{5x-3}}{m^{3x-3}-8m^{3x-2}+6m^{3x-1}}$

54. $\dfrac{-x^{2m+3}+2x^{2m+2}+2x^{2m+1}-4x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}}{x^{m-3}-x^{m-1}+x^{m-2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa construye estructuras prediseñadas para casas y edificios. Si x representa el número de estructuras y los costos de producción son: $x^2+12x-1\,200$ para las casas y $3x^2+x+2\,000$ para los edificios, ¿cuál es el costo total de producción de la compañía?

Solución

El costo total se obtiene al sumar el precio de las casas y el de los edificios.

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +12x & -1200 \\ + & 3x^2 & +\;\;x & +2\,000 \\ \hline & 4x^2 & +13x & +\;\;800 \end{array}$$

Por tanto, la empresa gasta: $4x^2+13x+800$

2 El largo de un terreno en metros lo determina la expresión $2a^2+3a+2$ y su ancho lo representa $2a-1$, ¿cuál es la superficie del terreno en metros cuadrados?

Solución

Para obtener la superficie del terreno se multiplica su largo por su ancho.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2a^2 & +3a & +2 \\ \times & & & 2a & -1 \\ \hline & 4a^3 & +6a^2 & +4a & \\ + & & -2a^2 & -3a & -2 \\ \hline & 4a^3 & +4a^2 & +a & -2 \end{array}$$

Entonces, la superficie del terreno es de: $4a^3+4a^2+a-2$ metros cuadrados.

3 Al adquirir $2x + 3$ artículos se paga un importe de $10x^2 + 29x + 21$ pesos, ¿cuál es el precio unitario de los artículos?

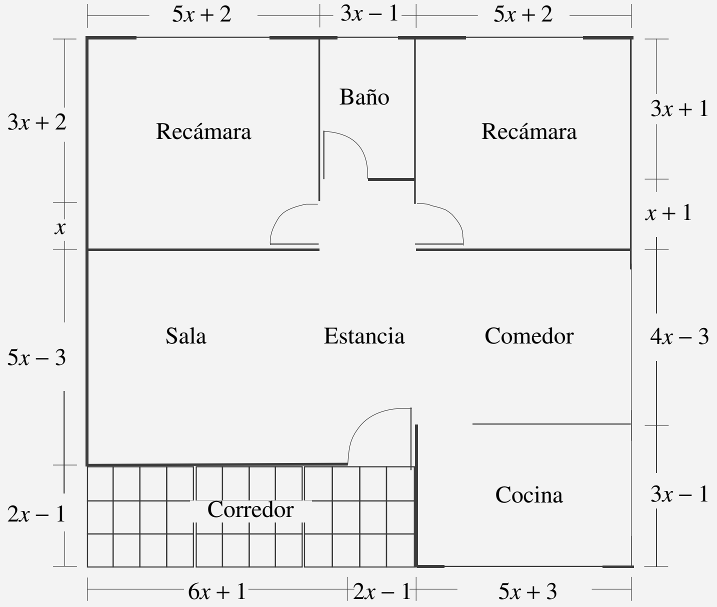
Solución

Para obtener el precio unitario, se divide el importe total entre el número de artículos.

$$\begin{array}{r|l} & 5x + 7 \\ \hline 2x + 3 & 10x^2 + 29x + 21 \\ & -10x^2 - 15x \\ \hline & \qquad 14x + 21 \\ & \qquad -14x - 21 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

El costo de cada artículo es: $5x + 7$ pesos.

4 Observa el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular.



De acuerdo con él, calcula la superficie que abarca la construcción, excepto el corredor.

Solución

Se calcula el largo y ancho del rectángulo que abarca la construcción:

$$\text{Largo} = (6x + 1) + (2x - 1) + (5x + 3) = 13x + 3$$

$$\text{Ancho} = (3x + 2) + x + (5x - 3) + (2x - 1) = 11x - 2$$

Se obtiene el área del rectángulo que ocupa la casa y la del corredor:

Área del rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= (13x + 3)(11x - 2) \\ &= 143x^2 - 26x + 33x - 6 \\ &= 143x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

Área del corredor

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= ((6x + 1) + (2x - 1))(2x - 1) \\ &= (8x)(2x - 1) \\ &= 16x^2 - 8x \end{aligned}$$

Para saber cuál es la superficie, se resta al área del rectángulo el área del corredor:

$$A = (143x^2 + 7x - 6) - (16x^2 - 8x)$$
$$= 143x^2 + 7x - 6 - 16x^2 + 8x$$
$$= 127x^2 + 15x - 6$$

Por tanto, la superficie es: $127x^2 + 15x - 6$

EJERCICIO 33

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una partícula recorre $5t^2 + 4t + 7$ metros, después recorre $t^2 - 4$ y, finalmente, $-5t + 3$ metros. ¿Cuál es la distancia total de su recorrido?
2. Una empresa obtiene con la venta de un artículo un ingreso de $3x^2 - 7x + 6\,400$ y sus costos de producción son de $2x^2 - 9x + 2\,000$. ¿Cuál es la utilidad que obtiene dicha compañía?
3. Un obrero pinta una barda, cuya superficie es de $8x^2 + 6xy + 9y^2$ metros cuadrados, si le faltan por pintar $3x^2 + 8y^2$ metros cuadrados, ¿qué superficie lleva pintada?
4. Un producto tiene un precio en el mercado de $5y + 3$ pesos, si se venden $3y + 1$ productos. ¿Cuál es el ingreso que se obtuvo?
5. Si un terreno rectangular mide $4x - 3y$ metros de largo y $5x + 2y$ metros de ancho, ¿cuál es su superficie?
6. Las dimensiones de una caja en decímetros son: $2w - 3$ de largo, $3w + 1$ de ancho y $2w + 1$ de altura. ¿Cuál es su volumen?
7. Se tienen $12x^2 - 5xy - 2y^2$ litros de aceite y se van a envasar en botellas de $3x - 2y$ litros de capacidad, ¿cuántas botellas se van a emplear?
8. Un móvil se mueve a razón de $3t^3 - t^2 + 4t - 2$ metros por segundo, calcula la distancia que recorre en un tiempo de $2t + 1$ segundos (distancia = (velocidad)(tiempo)).

Utiliza el plano del ejemplo 4 de la página anterior, para calcular lo siguiente:

9. La superficie de las recámaras.
10. El área del baño.
11. La superficie de la cocina.
12. El área del comedor.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

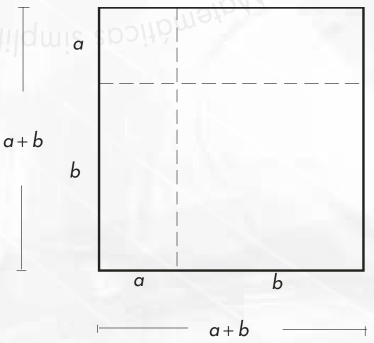
CAPÍTULO 3

PRODUCTOS NOTABLES

El trinomio cuadrado perfecto

Así se denomina al resultado de $(a + b)^2$, que se obtiene mediante un cuadrado de lado $(a + b)$; al que conforman dos cuadrados de área "a^2" y "b^2", así como dos rectángulos de área "ab", por tanto, el desarrollo de la expresión $(a + b)^2$ es:

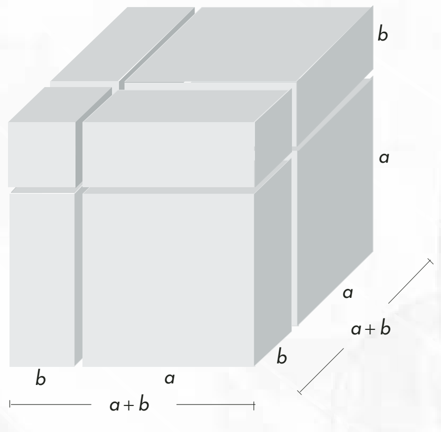
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



El cubo perfecto

Es la denominación del resultado de $(a + b)^3$; para su desarrollo se propone un cubo de arista $(a + b)$ cuyo volumen será la expresión $(a + b)^3$. A este cubo perfecto lo conforman dos cubos de volumen "a^3" y "b^3" respectivamente, tres paralelepípedos con volumen "a^2b" y otros tres con volumen "ab^2", lo que da el desarrollo de la expresión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Definición

Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de efectuar el producto.

Cuadrado de un binomio

El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo; esta regla general se expresa con la fórmula:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

A la expresión resultante se le conoce como trinomio cuadrado perfecto.

Demostración

La expresión $(a+b)^2$ es equivalente a $(a+b)(a+b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x+7)^2$.

Solución

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene:

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

2 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(3m+5n)^2$?

Solución

Se aplica la fórmula con $3m$ como primer término y $5n$ como segundo término

$$\begin{aligned}(3m+5n)^2 &= (3m)^2 + 2(3m)(5n) + (5n)^2\\ &= 9m^2 + 30mn + 25n^2\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $9m^2 + 30mn + 25n^2$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2$.

Solución

Se sustituyen los términos en la fórmula y se efectúan las operaciones, para obtener:

$$\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)(3) + (3)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{6}{2}a + 9 = \frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$$

4 Desarrolla $(5m^{2x-3} + n^{4x})^2$.

Solución

En este ejemplo los exponentes de las bases son expresiones algebraicas, entonces, al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(5m^{2x-3} + n^{4x})^2 = (5m^{2x-3})^2 + 2(5m^{2x-3})(n^{4x}) + (n^{4x})^2 = 25m^{4x-6} + 10m^{2x-3}n^{4x} + n^{8x}$$

5 Desarrolla $(-2x-3y)^2$.

Solución

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2$, se aplica la fórmula:

$$\begin{aligned}(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2 &= (-2x)^2 + 2(-2x)(-3y) + (-3y)^2\\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

Por tanto: $(-2x-3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

El desarrollo del cuadrado de una diferencia de dos cantidades, es igual a:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

En este desarrollo los términos se sustituyen con signo positivo, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(4x^4 - 9y^3)^2$?

Solución

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$\begin{aligned}(4x^4 - 9y^3)^2 &= (4x^4)^2 - 2(4x^4)(9y^3) + (9y^3)^2\\ &= 16x^8 - 72x^4y^3 + 81y^6\end{aligned}$$

2 Desarrolla $(3x^3y - 2x^5z)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula de la misma manera que en el ejemplo anterior y se obtiene:

$$(3x^3y - 2x^5z)^2 = (3x^3y)^2 - 2(3x^3y)(2x^5z) + (2x^5z)^2 = 9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$

Cuadrado de un trinomio

El desarrollo de la expresión: $(a+b+c)^2$ es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos:

$$\boldsymbol{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

Demostración

La expresión $(a+b+c)^2$ es equivalente al producto $(a+b+c)(a+b+c)$, entonces:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

Al simplificar los términos semejantes:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x + 2y + 3z)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3z)^2 &= (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3z) + 2(2y)(3z)\\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz\end{aligned}$$

2 Obtén el resultado de $(4m - 7n - 5)^2$.

Solución

El trinomio se expresa de la siguiente manera: $(4m - 7n - 5)^2 = (4m + (-7n) + (-5))^2$ y se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(4m - 7n - 5)^2 &= (4m)^2 + (-7n)^2 + (-5)^2 + 2(4m)(-7n) + 2(4m)(-5) + 2(-7n)(-5)\\ &= 16m^2 + 49n^2 + 25 - 56mn - 40m + 70n\end{aligned}$$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}x^{m+1} + 2x^m + x^{m-1}\right)^2$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)^2 + \left(2x^m\right)^2 + \left(x^{m-1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(2x^m\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(x^{m-1}\right) + 2\left(2x^m\right)\left(x^{m-1}\right)\\ &= \frac{1}{4}x^{2m+2} + 4x^{2m} + x^{2m-2} + 2x^{2m+1} + x^{2m} + 4x^{2m-1}\end{aligned}$$

Se reducen los términos semejantes y se acomodan de forma decreciente, respecto a los exponentes:

$$= \frac{1}{4}x^{2m+2} + 2x^{2m+1} + 5x^{2m} + 4x^{2m-1} + x^{2m-2}$$

EJERCICIO **34**

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(x + 8)^2$
2. $(m - 10)^2$
3. $(a - 3)^2$
4. $(y + 1)^2$
5. $(y + 5)^2$
6. $(p - 6)^2$
7. $(1 - b)^2$
8. $(x - 5)^2$
9. $(2 + n)^2$
10. $(4 - m)^2$
11. $(y + 9)^2$
12. $(x - 12)^2$
13. $(p + 15)^2$
14. $(2a - 1)^2$
15. $\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2$
16. $(3ax - 1)^2$
17. $(mn + 8a)^2$
18. $(7a - 3b)^2$
19. $(2x + 3y)^2$
20. $(x + 0.2)^2$
21. $(4x^3 + 5y)^2$
22. $(9a^3 - a^2b)^2$
23. $(6mn^4 + 3m^5p)^2$
24. $(a^5 - b^5)^2$
25. $\left(1 - \frac{3}{4}xy\right)^2$
26. $\left(\frac{1}{4}x - 2y^3\right)^2$
27. $\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{4y}\right)^2$

28. $(3x^2+4xy^7)^2$
29. $(5ab-3xy^5)^2$
30. $(m^9+12\,y^4)^2$
31. $(3x^2-9y^6)^2$
32. $(a^x-b^y)^2$
33. $(3x^{4a-5}+2y^{2a+1})^2$
34. $(m^{3a+6}-4n^{3b})^2$
35. $\left(3a^x+\frac{1}{2}a^{3x}b^{4y}\right)^2$
36. $\left(\frac{4}{5}a^{2m-1}-\frac{3}{2}b\right)^2$
37. $(0.6m^{2x}-0.5n^4)^2$
38. $(6x^{3m-2}+5y^{4m}z^3)^2$
39. $\left(0.3x^{2a}-0.8y^{b-1}\right)^2$
40. $\left(\frac{5}{3}x^{3a-2}+\frac{6}{5}y^{1-3a}\right)^2$
41. $\left(\frac{x^{8-y}}{2}+3y^{8-x}\right)^2$
42. $\left(\frac{x^{4a}}{5}+\frac{b^{4x}y^{a+1}}{4}\right)^2$
43. $(x+2y+3z)^2$
44. $(3x-2y+1)^2$
45. $(a+6b-5c)^2$
46. $(a^2+5a+4)^2$
47. $(a^2+3a-2)^2$
48. $(x^2-2x+1)^2$
49. $(x+y-2)^2$
50. $(2a-3b+1)^2$
51. $(4m+5n+\mathrm{p})^2$
52. $(3x^2+2y^2-1)^2$
53. $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+c\right)^2$
54. $\left(\frac{1}{6}x-y+\frac{1}{4}\right)^2$
55. $\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}\right)^2$
56. $(a^x-b^y+c^z)^2$
57. $(a^{x+1}-2a^x-a^{x-1})^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Binomios conjugados

Son de la forma $(a+b)(a-b)$ y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades, como se ilustra en la fórmula:

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Demostración
Se realiza el producto y se obtiene:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x+6)(x-6)$.

Solución

Ambos términos se elevan al cuadrado:

- El cuadrado del término que no cambia de signo: $(x)^2=x^2$
- El cuadrado del término que cambia de signo: $(6)^2=36$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es: x^2-36

2 Desarrolla $(m - 4)\ (m + 4)$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(m-4)(m+4) = (m)^2 - (4)^2 = m^2 - 16$$

3 Resuelve $(-2x^3 + 7)\ (-2x^3 - 7)$.

Solución

Los binomios se expresan de la siguiente manera para aplicar la fórmula:

$$(-2x^3+7)(-2x^3-7) = [(-2x^3)+7]\ [(-2x^3)-7] = (-2x^3)^2 - (7)^2 = 4x^6 - 49$$

4 Desarrolla $\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right)$.

Solución

Se ordenan los términos y se aplica la fórmula para obtener:

$$\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{10}{3} + \frac{3m^4}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{3m^4}{2}\right)^2 = \frac{100}{9} - \frac{9m^8}{4}$$

5 Resuelve $(5x^{2a-3} + y^{4m})\ (5x^{2a-3} - y^{4m})$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m}) = (5x^{2a-3})^2 - (y^{4m})^2 = 25x^{4a-6} - y^{8m}$$

Productos donde se aplican binomios conjugados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El resultado de $(m + n - p)\ (m + n + p)$ es:

Solución

Los elementos de ambos factores se agrupan de la siguiente manera:

$$(m+n-p)(m+n+p) = [(m+n)-p]\ [(m+n)+p]$$

Se aplica la fórmula para los binomios conjugados:

$$= (m+n)^2 - p^2$$

Se desarrolla el binomio y, finalmente, el resultado es:

$$= m^2 + 2mn + n^2 - p^2$$

2 Desarrolla $(x + y - 3)\ (x - y + 3)$.

Solución

El producto se expresa de la siguiente manera y se procede a aplicar el producto de binomios conjugados:

$$\begin{aligned}(x+y-3)(x-y+3) &= [x+(y-3)][x-(y-3)]\\ &= (x)^2 - (y-3)^2\\ &= x^2 - y^2 + 6y - 9\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^2 - y^2 + 6y - 9$

3 ¿Cuál es el resultado de $(2x-3y-z+5)(2x-3y+z-5)$?

Solución

Se agrupan los términos y se aplica la fórmula para binomios conjugados:

$$(2x-3y-z+5)(2x-3y+z-5) = [(2x-3y)-(z-5)][(2x-3y)+(z-5)]$$
$$= (2x-3y)^2-(z-5)^2$$

Se desarrollan los binomios, se eliminan los paréntesis y se ordenan los términos:

$$= (4x^2-12xy+9y^2)-(z^2-10z+25)$$
$$= 4x^2-12xy+9y^2-z^2+10z-25$$
$$= 4x^2+9y^2-z^2-12xy+10z-25$$

Finalmente, el resultado es: $4x^2+9y^2-z^2-12xy+10z-25$

EJERCICIO 35

Desarrolla los siguientes productos:

1. $(x+3)(x-3)$
2. $(a-1)(a+1)$
3. $(b+2)(b-2)$
4. $(k-8)(k+8)$
5. $(5-y)(5+y)$
6. $(9-a)(9+a)$
7. $(m-n)(m+n)$
8. $(xy-z)(xy+z)$
9. $(3x+5y)(3x-5y)$
10. $(4m-9n)(4m+9n)$
11. $(2b-3c)(3c+2b)$
12. $(6x^5+1)(6x^5-1)$
13. $(3m^3-8)(3m^3+8)$
14. $(5x^4y+4z)(-4z+5x^4y)$
15. $(9ab^4-c^7)(9ab^4+c^7)$
16. $(7a^4b^3-cd^5)(7a^4b^3+cd^5)$
17. $\left(\frac{3}{5}m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m-\frac{1}{2}\right)$
18. $\left(\frac{7}{6}x^3-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3+\frac{3}{2}\right)$
19. $\left(\frac{1}{3}xy-z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy+z^6\right)$
20. $\left(3x^2-\frac{1}{10}\right)\left(3x^2+\frac{1}{10}\right)$
21. $(3a^{x-4}+b^{3x})(3a^{x-4}-b^{3x})$
22. $(8y^{2a-3}-4x^{4a})(4x^{4a}+8y^{2a-3})$
23. $(a+b-c)(a+b+c)$
24. $(a-b+c)(a+b-c)$
25. $(m+n+p)(m-n-p)$
26. $(x+y-3)(x+y+3)$
27. $(4x+3y-z)(4x-3y+z)$
28. $(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2+xy)$
29. $(m^4-m^2-m)(m^4+m^2+m)$
30. $(2x+5y-3z)(2x+5y+3z)$
31. $(x+2y-1)(x+2y+1)$
32. $\left(\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}n-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}m+\frac{2}{3}n-\frac{1}{4}\right)$

33. $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)$

34. $\left(\frac{1}{3}x^{m+1}-\frac{1}{6}x^m+\frac{1}{2}x^{m-1}\right)\left(\frac{1}{3}x^{m+1}+\frac{1}{6}x^m-\frac{1}{2}x^{m-1}\right)$

35. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

36. $(x+y+z-1)(x-y+z+1)$

37. $(m-2n+3p-5)(m+2n-3p-5)$

38. $(x-y+z-4)(x-y-z+4)$

39. $(2x+3y+4z-7)(2x+3y-4z+7)$

40. $(x-y-3z-5)(x-y+3z+5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Binomios con término común

Son de la forma $(x+a)(x+b)$, su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los no comunes.

$$\mathbf{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

Demostración

Se realiza el producto de los binomios:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$$

Se agrupan los términos semejantes y se obtiene la fórmula:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

EJEMPLOS

1 Desarrolla $(x-6)(x+4)$.

Solución

Se desarrolla el procedimiento descrito:

- El cuadrado del término común: $(x)^2=x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común: $(-6+4)(x)=-2x$
- El producto de los términos no comunes: $(-6)(4)=-24$

Se suman los términos anteriores y se obtiene como resultado:

$$(x-6)(x+4)=x^2-2x-24$$

2 Efectúa $(m-3)(m-5)$.

Solución

Al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(m-3)(m-5)=m^2+(-3-5)m+(-3)(-5)=m^2-8m+15$$

3 Resuelve $(5x-4)(5x-2)$.

Solución

$$\begin{aligned}(5x-4)(5x-2)&=(5x)^2+(-4-2)(5x)+(-4)(-2)\\&=25x^2+(-6)(5x)+8\\&=25x^2-30x+8\end{aligned}$$

4 Efectúa la siguiente operación: $(7-x)(7+3x)$.

Solución

El término común es 7, con la aplicación de la fórmula se obtiene:

$$(7-x)(7+3x) = (7)^2+(-x+3x)(7)+(-x)(3x) = 49+14x-3x^2$$

5 ¿Cuál es el resultado de $(n^4 + 10)(n^4 - 8)$?

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(n^4 + 10)(n^4 - 8) = \left(n^4\right)^2+(10-8)n^4+(10)(-8) = n^8 + 2n^4 - 80$$

6 Efectúa $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene:

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}$$

7 Desarrolla $(x + y - 3)(x + y + 7)$.

Solución

Se agrupan los términos en común:

$$(x + y - 3)(x + y + 7) = [(x + y) - 3][(x + y) + 7]$$

Se aplica el desarrollo para el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x + y - 3)(x + y + 7) &= [(x + y) - 3][(x + y) + 7]\\ &= (x + y)^2 + (-3 + 7)(x + y) + (-3)(7)\\ &= (x + y)^2 + (4)(x + y) + (-21)\\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y - 21\end{aligned}$$

8 Desarrolla $(2m + 3n - 4)(2m - 5n + 2)$.

Solución

Se expresa el producto de la siguiente manera:

$$(2m + 3n - 4)(2m - 5n + 2) = [(2m) + (3n - 4)][(2m) + (-5n + 2)]$$

Al desarrollar el producto de binomios con término común, se obtiene:

$$\begin{aligned}&= (2m)^2 + (3n - 4 - 5n + 2)(2m) + (3n - 4)(-5n + 2)\\ &= 4m^2 + (-2n - 2)(2m) + (-15n^2 + 6n + 20n - 8)\\ &= 4m^2 + (-4mn - 4m) + (-15n^2 + 26n - 8)\\ &= 4m^2 - 4mn - 4m - 15n^2 + 26n - 8\\ &= 4m^2 - 15n^2 - 4mn - 4m + 26n - 8\end{aligned}$$

EJERCICIO 36

Resuelve los siguientes productos:

1. $(x-8)(x+5)$
2. $(m+7)(m-4)$
3. $(x-10)(x-2)$
4. $(x-6)(x-5)$
5. $(x+4)(x+6)$
6. $(n-3)(n+4)$
7. $(x-1)(x-8)$
8. $(a+3)(a-9)$
9. $(x-5)(x+2)$
10. $(m-3)(m+8)$
11. $(2x-6)(2x+4)$
12. $(3m+6)(3m-4)$
13. $(6x-4)(6x+3)$
14. $(4x-5)(4x-2)$
15. $(1-3x)(2-3x)$
16. $(4+5x)(6+5x)$
17. $(2-7x)(2+6x)$
18. $(5+2x)(5-9x)$
19. $(x^2-10)(x^2+6)$
20. $(m^3-4)(m^3-8)$
21. $(x^4+6)(x^4-12)$
22. $(x^5-1)(x^5+2)$
23. $(a^3-5)(a^3-2)$
24. $(x^{2m-1}+7)(x^{2m-1}-5)$
25. $(a^2x^3+b^4)(a^2x^3+2b^4)$
26. $(3x^m+4y^n)(3x^m-7y^n)$
27. $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)$
28. $\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}\right)$
29. $\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}y-\frac{5}{8}\right)$
30. $\left(-xy+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-xy\right)$
31. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{3}{7}y-\frac{4}{5}x\right)$
32. $\left(\frac{6}{5}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)$
33. $(a+b+3)(a+b+4)$
34. $(a-2b+1)(a-2b+5)$
35. $(x-y+3z)(x-y-7z)$
36. $(2x+y+2)(2x+y-1)$
37. $(m^2+n^2-5)(m^2+n^2+9)$
38. $(a+b-c)(a-b-3c)$
39. $(x+3y-4z)(x-2y+z)$
40. $(a+5b+c)(a-5b+c)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cubo de un binomio

Es de la forma $(a + b)^3$, su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Demostración

La expresión $(a + b)^3$ es equivalente al producto $(a + b)^2(a + b)$, entonces:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(m + 5)^3$.

Solución

Se obtiene cada uno de los términos que conforman al cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(m)^3 = m^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(m)^2(5) = 15m^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(m)(5)^2 = 3(m)(25) = 75m$
- El cubo del segundo: $(5)^3 = 125$

Estos resultados se suman y se obtiene:

$$(m + 5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125$$

2 Desarrolla el siguiente binomio $(x - 4)^3$:

Solución

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(x - 4)^3 = (x + (-4))^3$, se obtiene cada uno de los términos del cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(x)^3 = x^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(x)^2(-4) = -12x^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(x)(-4)^2 = 3(x)(16) = 48x$
- El cubo del segundo término: $(-4)^3 = -64$

Finalmente, el desarrollo es:

$$(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

3 Desarrolla $(-2m - 3n)^3$.

Solución

El binomio se representa como: $(-2m - 3n)^3 = [(-2m) + (-3n)]^3$, se aplica la regla general:

$$\begin{aligned}(-2m - 3n)^3 &= (-2m)^3 + 3(-2m)^2(-3n) + 3(-2m)(-3n)^2 + (-3n)^3\\ &= (-8m^3) + 3(4m^2)(-3n) + 3(-2m)(9n^2) + (-27n^3)\\ &= -8m^3 - 36m^2n - 54mn^2 - 27n^3\end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El desarrollo del cubo de la diferencia de dos cantidades se obtiene con la fórmula:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Al utilizar la fórmula los términos se sustituyen con signo positivo.

4 ¿Cuál es el resultado de $(3x^4 - 2y^3)^3$?

Solución

Se aplica la fórmula y se determina que:

$$\begin{aligned}(3x^4 - 2y^3)^3 &= (3x^4)^3 - 3(3x^4)^2(2y^3) + 3(3x^4)(2y^3)^2 - (2y^3)^3 \\ &= 27x^{12} - 3(9x^8)(2y^3) + 3(3x^4)(4y^6) - 8y^9 \\ &= 27x^{12} - 54x^8y^3 + 36x^4y^6 - 8y^9\end{aligned}$$

EJERCICIO 37

Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1. $(x - 1)^3$
2. $(m + 6)^3$
3. $(x - 2)^3$
4. $(a + 10)^3$
5. $(n - 7)^3$
6. $(x + 3)^3$
7. $(1 - x)^3$
8. $(10 - m)^3$
9. $(2x + 1)^3$
10. $(3a - 4)^3$
11. $(2x + 3)^3$
12. $(1 - 4m)^3$
13. $(3x - 4y)^3$
14. $(5m^2 + 2n^5)^3$
15. $(3x^3y - 2z^4)^3$
16. $(4x^2 + 2xy)^3$
17. $(3m^4 - 4m^3n)^3$
18. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$
19. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$
20. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^3$
21. $\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y\right)^3$
22. $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b\right)^3$
23. $\left(\frac{1}{3}x^4 + y\right)^3$
24. $\left(2x^{2a-3} - 3y^{4a+1}\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables

Se utiliza para resolver una multiplicación de polinomios, siempre que las características de los factores permitan aplicar las reglas de los productos notables. Se agrupan las expresiones y se desarrolla el producto notable que corresponda a las características de los mismos; con los factores resultantes se aplica el mismo procedimiento hasta obtener el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3)$.

Solución

Se eligen los factores $(x + 2)(x - 2)$, los que se resuelven como un producto de binomios conjugados:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

Entonces el producto inicial se representa como:

$$(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = (x^2 - 4)(x^2 + 3)$$

Por último, se aplica el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x^2 - 4)(x^2 + 3) &= (x^2)^2 + (-4 + 3)(x^2) + (-4)(3)\\ &= x^4 - x^2 - 12\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = x^4 - x^2 - 12$

2 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 1)\,(x + 2)\,(x - 1)\,(x - 2)$.

Solución

De acuerdo con la elección de los factores es como se procede a aplicar el producto notable, en este caso reagruparemos los factores de la siguiente manera:

$$(x + 1)\,(x - 1)\,(x + 2)\,(x - 2)$$

Al desarrollar mediante binomios conjugados, se obtiene:

$$(x + 1)\,(x - 1) = x^2 - 1 \qquad (x + 2)\,(x - 2) = x^2 - 4$$

La expresión se transforma en:

$$(x + 1)\,(x - 1)\,(x + 2)\,(x - 2) = (x^2 - 1)\,(x^2 - 4)$$

Por último se aplican binomios con término común:

$$\begin{aligned}&= (x^2)^2 + (-1 - 4)x^2 + (-1)(-4)\\ &= x^4 - 5x^2 + 4\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 1)\,(x + 2)\,(x - 1)\,(x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$

3 Resuelve el siguiente producto: $(x + 3)^2(x - 3)^2$.

Solución

Se desarrollan los cuadrados de los binomios:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9\ ;\ \ (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Luego:

$$(x + 3)^2(x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 9)(x^2 - 6x + 9) = (x^2 + 9 + 6x)\,(x^2 + 9 - 6x)$$

Al aplicar binomios conjugados se determina que:

$$\begin{aligned}(x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = [(x^2 + 9)^2 - (6x)^2] &= (x^2)^2 + 2(x^2)\,(9) + (9)^2 - 36x^2\\ &= x^4 + 18x^2 + 81 - 36x^2\\ &= x^4 - 18x^2 + 81\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^4 - 18x^2 + 81$

EJERCICIO 38

Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando productos notables:

1. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
2. $(m+8)(m-8)(m+1)(m-1)$
3. $(3x-5)(3x+2)(9x^2-9x-10)$
4. $(5x-6)^2(5x+6)^2$
5. $(m+2)^3(m-2)^3$
6. $(-x-6)^2(x^2-12x+36)$
7. $(n^2-1)(n^2+7)(n^4-6n^2+7)$
8. $(x^2+y)^2(x^2-y)^2(x^4+y^2)^2$
9. $(2m+6)(2m-8)(4m^2+3m+1)$
10. $(9-6x^3)(6x^3+9)(81+36x^6)$
11. $(x-4)(x+5)(x+4)(x-5)$
12. $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{5}y^5\right)^2\left(\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{5}y^5\right)^2$
13. $[(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)]^2$
14. $(m^2-m-1)(m^2+m+1)$
15. $(x-y)(x^2+y^2)(x+y)$
16. $(m-2)(m^2-4)^2(m+2)$
17. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-y^4)$
18. $(x+1)(x-3)(x-1)(x+3)$
19. $(m^4+5)(m-2)(m^2+4)(m+2)$
20. $[(n+2)(n-2)(n^2+4)]^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

FACTORIZACIÓN

Reseña HISTÓRICA

Pierre de Fermat

Matemático francés quien nació en Beaumont de Lomagne y falleció en Toulouse. Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad; Descartes y Fermat inventaron la geometría analítica, cada uno por su lado. Si todas estas aportaciones de primera categoría no son suficientes para ponerlo a la cabeza de sus contemporáneos en la matemática pura, podemos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador innato. Era también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte.

Pierre de Fermat
(1601-1665 d.C.)

Definición

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Factor común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^6 - x^5 + x^2$.

Solución

Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente $\left(x^2\right)$, después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^4 \qquad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Los resultados se expresan de la siguiente manera:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2\left(x^4 - x^3 + 1\right)$$

2 Factoriza: $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$.

Solución

Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común divisor de ellos y también se busca el factor común de las literales:

MCD (16, 12, 20) = 4 Factor común literal $= a^3b^2$

Se realizan las divisiones término a término y el resultado de la factorización es:

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2\left(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8\right)$$

3 Obtén la factorización de la expresión: $18x^2 - 12x + 54$.

Solución

El máximo común divisor de los coeficientes es 6 y no existe un factor común literal, por tanto, la expresión tiene sólo un factor común numérico y se expresa como:

$$18x^2 - 12x + 54 = 6\left(3x^2 - 2x + 9\right)$$

4 Factoriza: $(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2$.

Solución

En esta expresión el factor común está compuesto por binomios, por consiguiente, se toma de cada uno de ellos el de menor exponente y se realiza la factorización de la siguiente manera:

$$(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[(5a-7b)-(2a-3b)\right]$$

Se reducen los términos semejantes del último factor:

$$=(2a-3b)^2(5a-7b)^2[5a-7b-2a+3b]$$
$$=(2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$

EJERCICIO 39

Factorizar las siguientes expresiones:

1. a^2+a
2. $a^3b^2-2a^3b$
3. $a^4+a^3-a^2$
4. $18x^5+30x^4$
5. $48x^2-12x^3-24x^4$
6. $25b^2+35b^4-45b^5$
7. $11ax-121a^2x+33a^3$
8. $9a^5b-12\,a^2b^3+15ab^2-18a^3b^4$
9. $9x^2+6x+3$
10. $4x^4-8x^3+12x^2$
11. $6x^2-6xy-6x$
12. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$
13. $34ax^2+51a^2y-68ay^2$
14. $55m^2n^3x+110m^2n^3x^2-220m^2y^3$
15. $25x^7-10x^5+15x^3-5x^2$
16. $9a^2-12ab+15a^3b^2-24ab^3$
17. $12m^2n+24m^3n^2-36m^4n+48m^5n^4$
18. $3a^2b+6a^3b^2-5a^4b^3+8a^5b^4+4a^6b^5$
19. $16x^3y^2-8x^4y-24x^2y-40x^2y^3$
20. $100a^2b^3c-150ab^2c^2+50ab^3c^3-200abc^2$
21. $93a^3x^2y-62a^2x^3y^2-124a^2x$
22. $6x(3x-1)^2+2x^2(1-3x)^2$
23. $9(x+1)-3(x+1)^2$
24. $x^2(x+2)-x(x+2)$
25. $4x^2(2x-5)^2+8x^2(2x-5)$
26. $(2x-1)(x+4)-(2x-1)(3x+1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 Factoriza: $am+bm+a^2+ab$.

Solución

Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza "m" y de los segundos "a".

$$am+bm+a^2+ab=(am+bm)+(a^2+ab)=m(a+b)+a(a+b)$$

La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $a+b$ y se obtiene como resultado:

$$=(a+b)(m+a)$$

2 ¿Cuál es el resultado de factorizar $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$?

Solución

Se agrupan los términos y se buscan los respectivos factores comunes de cada uno para poder factorizarlos y obtener como resultado:

$$6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab = (6ax + 3a^2) + (-4bx - 2ab) = 3a(2x + a) - 2b(2x + a)$$
$$= (2x + a)(3a - 2b)$$

3 Factoriza: $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$.

Solución

Se repiten los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b = (6a^2x + 4ab + 2a) + (-3abx - 2b^2 - b)$$
$$= 2a(3ax + 2b + 1) - b(3ax + 2b + 1)$$
$$= (3ax + 2b + 1)(2a - b)$$

EJERCICIO **40**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + mn + mx + nx$
2. $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$
3. $ax - bx + ay - by$
4. $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
5. $am - 2bm - 3an + 6bn$
6. $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
7. $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$
8. $5m^2n + 5mp^2 + n^2p^2 + mn^3$
9. $3a - 2b - 2by^4 + 3ay^4$
10. $2mx^4 + 3nx^4 + 10m + 15n$
11. $bm^2 + by^2 - cm^2 - cy^2$
12. $x^3 - 15 - 5x + 3x^2$
13. $3bz - by - 9mz + 3my$
14. $a^3 + a^2 + a + 1$
15. $1 + 2a - 3a^2 - 6a^3$
16. $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$
17. $4a - 1 - 4ab + b$
18. $18m^3 + 12m^2 - 15m - 10$
19. $x^2yz - xz^2m + xy^2m - yzm^2$
20. $p^3t^3 + mn^2p^2t + m^2npt^2 + m^3n^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $x^2 - 9$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

$$\sqrt{x^2} = x \quad ; \quad \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, la factorización es: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

2 Factoriza: $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$$

3 ¿Cuál es el resultado de factorizar $x^{2a-4} - y^{6b}$?

Solución

Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = \left(x^{a-2} + y^{3b}\right)\left(x^{a-2} - y^{3b}\right)$$

4 Factoriza la expresión: $(2x + 3)^2 - (x-1)^2$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos:

$$\sqrt{(2x + 3)^2} = 2x + 3 \qquad \sqrt{(x-1)^2} = x - 1$$

Se sustituyen las raíces obtenidas en la fórmula:

$$(2x + 3)^2 - (x-1)^2 = [(2x + 3) + (x-1)][(2x + 3) - (x-1)]$$

Se reducen los términos semejantes de cada uno de los factores y se obtiene como resultado:

$$= [2x + 3 + x - 1][2x + 3 - x + 1]$$
$$= [3x + 2][x + 4]$$

EJERCICIO 41

Factoriza las siguientes expresiones:

1. x^2-1
2. x^2-49
3. $81-x^2$
4. $16x^2-9$
5. a^4-b^4
6. x^4-64
7. $100-16x^2$
8. $36x^2-1$
9. $4-25x^2$
10. $4a^4-9b^2c^2$
11. x^6-36
12. $16a^4b^6-c^6$
13. $x^2-\frac{1}{4}$
14. $x^2-\frac{4}{81}$
15. $x^2-\frac{16}{49}$
16. $x^4-\frac{1}{16}$
17. $49x^2-\frac{16}{25}$
18. $x^{6a}-y^{4b}$
19. $a^{2x+6}-9b^{6y}$
20. $m^{4a+8}-25$
21. $1-x^{2a}$
22. $-n^{8x+2y}+m^{6x-4y}$
23. $16x^{6a}-49y^{2b}$
24. $(x-1)^2-(y-3)^2$
25. $(2x+1)^2-(y+5)^2$
26. $(x-1)^2-16y^2$
27. $4(3x-2)^2-9(x-1)^2$
28. $-(x+2y)^2+16(x+y)^2$
29. $25(4x-3)^2-9(2x+1)^2$
30. $49x^4-4(x^2-3x)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Trinomio cuadrado perfecto

Se conoce así a toda expresión de la forma:

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

1. Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.
2. Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

3. Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces:

$$\text{Comprobación } = 2ab$$

4. Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: x^2+6x+9.

Solución

Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \text{Comprobación} = 2(x)(3) = 6x$$

Al tomar el signo del segundo término, la factorización es:

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

2 Factoriza: $4x^2+9y^2-12xy$.

Solución

Se ordenan los términos de la siguiente manera:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2$$

Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio es cuadrado perfecto:

$\sqrt{4x^2}=2x$ $\quad$ $\sqrt{9y^2}=3y$ $\quad$ Comprobación $=2(2x)(3y)=12xy$

Finalmente, el resultado de la factorización es:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$$

3 Factoriza la siguiente expresión: $(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}$.

Solución

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba el doble producto:

$\sqrt{(m+n)^2}=m+n$ $\quad$ $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $\quad$ Comprobación $=2(m+n)\left(\frac{1}{2}\right)=m+n$

Por tanto, la factorización de la expresión propuesta es:

$$(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}=\left((m+n)+\frac{1}{2}\right)^2=\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2$$

4 Factoriza la expresión: $3a-2\sqrt{15ab}+5b$.

Solución

Las raíces de los extremos y la comprobación de que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto es:

$\sqrt{3a}$ y $\sqrt{5b}$ $\quad$ Comprobación $=2\left(\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{5b}\right)=2\sqrt{(3a)(5b)}=2\sqrt{15ab}$

Por tanto:

$$3a-2\sqrt{15ab}+5b=\left(\sqrt{3a}-\sqrt{5b}\right)^2$$

5 Factoriza $x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4$.

Solución

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba:

$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{(4)(2)}}=x^{\frac{1}{8}}$ $\quad$ $\sqrt{4}=2$ $\quad$ Comprobación $=2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2)=4x^{\frac{1}{8}}$

Por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4=\left(x^{\frac{1}{8}}+2\right)^2$$

EJERCICIO 42

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $a^2 + 8a + 16$
2. $m^2 - 10m + 25$
3. $n^2 - 8n + 16$
4. $x^2 - 6x + 9$
5. $x^2 + 12x + 36$
6. $9a^2 - 30a + 25$
7. $36 + 121c^2 - 132c$
8. $16a^2 + 24ab + 9b^2$
9. $4a^2 - 20ab + 25b^2$
10. $9a^2 + 6ab + b^2$
11. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
12. $a^2 - 24x^2a^3 + 144x^4a^4$
13. $100a^4 - 60a^2b + 9b^2$
14. $a^8 + 36b^2c^2 + 12a^4bc$
15. $121 + 198a^6 + 81a^{12}$
16. $49x^6 - 70ax^3y^2 + 25a^2y^4$
17. $400a^{10} + 40a^5 + 1$
18. $x^8 + 18x^4 + 81$
19. $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$
20. $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$
21. $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$
22. $\frac{1}{25} + \frac{25}{36}b^4 - \frac{b^2}{3}$
23. $16m^6 - 2m^3n^2 + \frac{n^4}{16}$
24. $9(a + x)^2 - 12(a + x) + 4$
25. $4(1 + m)^2 - 4(1 + m)(n - 1) + (n - 1)^2$
26. $9(a - b)^2 + 12(a - b)(a + b) + 4(a + b)^2$
27. $(m + n)^2 - 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2$
28. $4a^2 - 4a(b - a) + (b - a)^2$
29. $(m + a)^2 - 2(m + a)(a + b) + (a + b)^2$
30. $x + 2\sqrt{2xy} + 2y$
31. $ax + 4\sqrt{ax} + 4$
32. $a^3 - 10a^{\frac{3}{2}} + 25$
33. $x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 9$
34. $16x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{4}} + 1$
35. $m^{\frac{2}{3}} + 4m^{\frac{1}{3}} + 4$
36. $\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Esta expresión resulta del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 + 11x + 24$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$

2 Factoriza la expresión: $m^2 - 13m + 30$.

Solución

La raíz cuadrada del término cuadrático es "m"; el primer factor va acompañado del signo del segundo término $(-13m)$ y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer términos $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m - \quad)(m - \quad)$$

Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman (ejemplos 1 y 2), pero si los signos de los factores son diferentes, entonces los números buscados se restan (ejemplos siguientes).

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 18 - 7x$.

Solución

Se ordenan los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 7x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer factor se coloca el signo del término lineal (– 7x) y en el segundo se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos del término lineal (– 7x) y el independiente (– 18)

$$x^2 - 7x - 18 = (x - \quad)(x + \quad)$$

Se buscan dos números cuyo producto sea igual a 18 y cuya resta sea 7. En este caso los números que cumplen esta condición son 9 y 2; es importante señalar que el número mayor va en el primer factor y el menor en el segundo.

$$x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$$

2 Factoriza la expresión: $x^4 - x^2 - 6$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicarse den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea:

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

3 Factoriza la expresión: $x^2 + xy - 20y^2$.

Solución

Después de extraer la raíz cuadrada, acomodar los signos y buscar los números, la factorización es:

$$x^2 + xy - 20y^2 = (x + 5y)(x - 4y)$$

4 Factoriza la expresión: $21 - 4x - x^2$.

Solución

Se ordena el trinomio y se factoriza el signo del término cuadrático:

$$21 - 4x - x^2 = -x^2 - 4x + 21 = -(x^2 + 4x - 21)$$

Al factorizar la última expresión:

$$-(x^2 + 4x - 21) = -(x + 7)(x - 3)$$

Se multiplica el segundo factor por el signo negativo y se ordena para que el resultado sea:

$$-(x + 7)(x - 3) = (x + 7)(-x + 3) = (x + 7)(3 - x)$$

5 Factoriza la expresión: $5 + 4a^{3n} - a^{6n}$.

Solución

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5 + 4a^{3n} - a^{6n} = -a^{6n} + 4a^{3n} + 5 = -(a^{6n} - 4a^{3n} - 5)$$

La expresión encerrada en el paréntesis se factoriza al igual que las anteriores:

$$-(a^{6n} - 4a^{3n} - 5) = -(a^{3n} - 5)(a^{3n} + 1)$$

Se multiplica el signo por los términos del primer factor y el resultado de la factorización es:

$$-\left(a^{3n}-5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(-a^{3n}+5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(5-a^{3n}\right)\left(a^{3n}+1\right)$$

6 Factoriza: $(2x+3)^2-3(2x+3)-28$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se realizan los procedimientos descritos en los ejemplos anteriores para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2-3(2x+3)-28&=((2x+3)-7)((2x+3)+4)\\&=(2x+3-7)(2x+3+4)=(2x-4)(2x+7)\\&=2(x-2)(2x+7)\end{aligned}$$

EJERCICIO 43

Factoriza las siguientes expresiones:

1. x^2+3x+2
2. $m^2-11m+30$
3. $n^2-7n+12$
4. $y^2-15y+56$
5. x^2+7x+6
6. $x^2+7x+12$
7. $a^2+10a+24$
8. $b^2-7b+10$
9. $m^2-9m+20$
10. y^2+4y+3
11. x^2-5x+4
12. n^2+6n+8
13. $a^2-16a-36$
14. y^2+y-30
15. $x^2-18-7x$
16. $x^2-18xy+80y^2$
17. $a^2-5ab-50b^2$
18. $m^2-7mn-30n^2$
19. $x^2+xy-56y^2$
20. m^4+3m^2-4
21. y^4-6y^2+8
22. n^4-20n^2+64
23. a^4-37a^2+36
24. x^4-x^2-90
25. $a^2b^2+ab-12$
26. $(5y)^2+13(5y)+42$
27. y^6-5y^3-14
28. $m^2-4mn-21n^2$
29. $5+4b-b^2$
30. $z^{10}+z^5-20$
31. $y^4+7xy^2-60x^2$
32. $(a-b)^2+5(a-b)-24$
33. $x^4y^4-2x^2y^2-99$
34. $m^4n^4+m^2n^2-132$
35. $n^2-34n+288$
36. $y^2+3y-550$
37. $c^2-22c-968$
38. $a^2+33a+252$
39. $x^2+44x+363$
40. $t^2-99t+2\,430$
41. $24-5x-x^2$
42. $12+x-x^2$
43. $40-3x-x^2$
44. $42-x^2+x$
45. $16+6(3x)-(3x)^2$
46. $9-8(2x)-(2x)^2$
47. $77-4(8x)-(8x)^2$
48. $143+2(5x)-(5x)^2$
49. $x^{2a}-13x^a+36$
50. $b^{4x}+b^{2x}-72$
51. $y^{6a}+65y^{3a}+64$
52. $2-x^{4a}-x^{8a}$
53. $45+4x^{a+2}-x^{2(a+2)}$
54. $(x+1)^2-12(x+1)+32$
55. $(2x-7)^2-3(2x-7)-88$
56. $(5x+y)^2+(5x+y)-42$
57. $(6a+5)^2-15(6a+5)+50$
58. $22-9(x+3y)-(x+3y)^2$
59. $24+5(1-4x)-(1-4x)^2$
60. $10y^2-3y(x-2y)-(x-2y)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $6x^2 - 7x - 3$.

Solución

Se ordenan los términos según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción:

$$\frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{6} = \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(2x - 3)(3x + 1)$

2 Factoriza: $3x^2 - 5x - 2$.

Solución

Se multiplica y divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma: $x^2 + bx + c$

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

$$= \frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x + 1)}{3} = (x - 2)(3x + 1)$$

Por consiguiente: $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$

3 Factoriza la siguiente expresión: $6a^2x^2 + 5ax - 21$.

Solución

Se aplican los pasos descritos en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x^2 + 5ax - 21 = \frac{6(6a^2x^2 + 5ax - 21)}{6} = \frac{36a^2x^2 + 5(6ax) - 126}{6} = \frac{(6ax)^2 + 5(6ax) - 126}{6}$$

$$= \frac{(6ax + 14)(6ax - 9)}{6} = \frac{2(3ax + 7)3(2ax - 3)}{6} = \frac{6(3ax + 7)(2ax - 3)}{6} = (3ax + 7)(2ax - 3)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $6a^2x^2 + 5ax - 21 = (3ax + 7)(2ax - 3)$

4 Factoriza la siguiente expresión: $5 + 11x - 12x^2$.

Solución

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5 + 11x - 12x^2 = -12x^2 + 11x + 5 = -(12x^2 - 11x - 5)$$

Se realiza la factorización y se obtiene:

$$= -\frac{12(12x^2 - 11x - 5)}{12} = -\frac{144x^2 - 11(12x) - 60}{12} = -\frac{(12x)^2 - 11(12x) - 60}{12}$$

$$= -\frac{(12x - 15)(12x + 4)}{12} = -\frac{3(4x - 5)4(3x + 1)}{12} = -\frac{12(4x - 5)(3x + 1)}{12} = -(4x - 5)(3x + 1)$$

Se multiplica el signo por el primer factor y se ordenan los términos:

$$-(4x - 5)(3x + 1) = (-4x + 5)(3x + 1) = (5 - 4x)(3x + 1)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(5 - 4x)(3x + 1)$

Por agrupación de términos

EJEMPLOS

1 Factoriza el trinomio: $6x^2 + 13x + 5$.

Solución

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente: $(6)(5) = 30$

Se buscan dos números que multiplicados den 30 y sumados 13, en este caso los números son 10 y 3, por tanto, el segundo término del trinomio se expresa como: $13x = 10x + 3x$ y se procede a factorizar agrupando términos:

$$6x^2 + 13x + 5 = 6x^2 + 10x + 3x + 5 = 2x(3x + 5) + 1(3x + 5) = (3x + 5)(2x + 1)$$

Finalmente, la factorización es: $6x^2 + 13x + 5 = (3x + 5)(2x + 1)$

2 Factoriza: $8x^4 - 19x^2 + 6$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos de la expresión: $(8)(6) = 48$

Los números que multiplicados dan 48 y sumados −19 son −16 y −3, por consiguiente, se expresa como: $-19x^2 = -16x^2 - 3x^2$ y se procede a factorizar:

$$8x^4 - 19x^2 + 6 = 8x^4 - 16x^2 - 3x^2 + 6 = (8x^4 - 16x^2) + (-3x^2 + 6)$$
$$= 8x^2(x^2 - 2) - 3(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(8x^2 - 3)$$

Finalmente: $8x^4 - 19x^2 + 6 = (x^2 - 2)(8x^2 - 3)$

3 Factoriza la expresión: $15x^2 - 2xy - 8y^2$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos del trinomio: $(15)(-8) = -120$

Se descompone −120 en dos factores, de tal manera que restados den como resultado el coeficiente del término central −2, estos números son: − 12 y 10

La expresión se descompone de la siguiente manera:

$$15x^2 - 2xy - 8y^2 = 15x^2 - 12xy + 10xy - 8y^2 = 3x(5x - 4y) + 2y(5x - 4y)$$
$$= (5x - 4y)(3x + 2y)$$

Se concluye que: $15x^2 - 2xy - 8y^2 = (5x - 4y)(3x + 2y)$

EJERCICIO 44

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $5m^2 + 13m - 6$
2. $3a^2 - 5a - 2$
3. $6y^2 + 7y + 2$
4. $2x^2 + 3x - 2$
5. $4n^2 + 15n + 9$
6. $20x^2 + x - 1$
7. $7a^2 - 44a - 35$
8. $2y^2 + 5y + 2$
9. $20x^2 + 13x + 2$
10. $15m^2 - 8m - 12$
11. $44z + 20z^2 - 15$
12. $2b^2 + 29b + 90$
13. $6y^4 + 5y^2 - 6$
14. $14m^4 - 45m^2 - 14$
15. $6a^2b^2 + 5ab - 25$
16. $15y^2 - by - 2b^2$
17. $6n^2 - 13mn - 15m^2$
18. $30 + 13x - 3x^2$
19. $15 + 2b^2 - 8b^4$
20. $30x^2 + 17xy - 21y^2$
21. $10a^8 + 29a^4 + 10$
22. $6a^2 - 43ab - 15b^2$
23. $6 - 5x^2 - 6x^4$
24. $30x^{10} - 91x^5 - 30$
25. $6m^2 - 11mn + 4n^2$
26. $6a^2x^2 - 11axy - 35y^2$
27. $24a^2 + 5ab - 14b^2$
28. $4x^2y^2 + 3xy - 10$
29. $5a^4b^2 - 13a^2bc - 6c^2$
30. $2m^2 + 9mn - 110n^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Estos trinomios también son de la forma $ax^2 + bx + c$; sin embargo, algunos coeficientes son fraccionarios o tienen raíz cuadrada.

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$.

Solución

En este caso se incluyen fracciones, entonces los extremos deben expresarse como una fracción que contenga el mismo denominador, por tanto:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{2(12)}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$$

Se multiplican los coeficientes numeradores de los extremos del trinomio: (24)(1) = 24

Se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumados 11, en este caso los números son 3 y 8, por tanto el trinomio se expresa como:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{3}{12}p + \frac{8}{12}p + \frac{1}{12} = 2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12}$$

Se procede a realizar la factorización del polinomio resultante:

$$2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12} = p\left(2p + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(2p + \frac{1}{4}\right) = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$$

Entonces, se concluye que: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$

2 Factoriza la expresión: $6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10}$.

Solución

Se convierten los coeficientes del trinomio en una fracción con denominador común:

$$6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10} = \frac{6(20)}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3(2)}{10(2)} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20}$$

Se multiplican los numeradores de los extremos: (120)(6) = 720, entonces se buscan dos números que multiplicados den 720 y restados 29, los cuales son: 45 y 16, por tanto, la expresión se representa como:

$$\frac{120}{20}x^2-\frac{29}{20}x-\frac{6}{20}=\frac{120}{20}x^2-\frac{45}{20}x+\frac{16}{20}x-\frac{6}{20}=6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=$$

Al factorizar se obtiene como resultado:

$$6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=3x\left(2x-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(2x-\frac{3}{4}\right)=\left(2x-\frac{3}{4}\right)\left(3x+\frac{2}{5}\right)$$

3 Factoriza la expresión $3x+2\sqrt{x}-8$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos: (3)(8) = 24

Se buscan dos números que al multiplicarse den 24 y restados 2, en este caso los números son 6 y 4, entonces:

$$3x+2\sqrt{x}-8=3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8$$

Se expresa $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ y se realiza la factorización:

$$3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-4\left(\sqrt{x}+2\right)$$
$$=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$$

Por consiguiente, el resultado de la factorización es: $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$

EJERCICIO 45

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $3x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{8}$
2. $2x^2+\frac{7}{15}x-\frac{2}{15}$
3. $6x^2+\frac{15}{4}x+\frac{3}{8}$
4. $5m^2+\frac{23}{6}m+\frac{1}{3}$
5. $4m^2+\frac{17}{15}m-\frac{1}{15}$
6. $\frac{1}{6}a^2+\frac{17}{72}a+\frac{1}{12}$
7. $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}xy-\frac{1}{8}y^2$
8. $\frac{3}{25}x^2-\frac{3}{20}x-\frac{1}{12}$
9. $\frac{1}{24}x^2-\frac{13}{72}xy+\frac{1}{6}y^2$
10. $2x+13\sqrt{x}+15$
11. $12x-5\sqrt{x}-2$
12. $15x-23\sqrt{x}-28$
13. $2x-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-3y$
14. $6x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-40$
15. $3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}-2$
16. $5(x+y)-6\sqrt{x+y}-8$
17. $12x^{\frac{4}{3}}-17x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}-40y$
18. $8x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-15y^{\frac{4}{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma o diferencia de cubos

Dadas las expresiones de la forma: a^3+b^3 y a^3-b^3, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad\qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $27x^3+8$.

Solución

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{27x^3}=3x \qquad\qquad \sqrt[3]{8}=2$$

Se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$27x^3+8=(3x+2)\left((3x)^2-(3x)(2)+(2)^2\right)$$
$$=(3x+2)(9x^2-6x+4)$$

2 Factoriza: m^6-216.

Solución

Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituyen en la fórmula para obtener:

$$m^6-216=(m^2-6)\left((m^2)^2+(m^2)(6)+(6)^2\right)$$
$$=(m^2-6)(m^4+6m^2+36)$$

3 Factoriza: $x^{15}+64y^3$.

Solución

Se realiza el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores para obtener:

$$x^{15}+64y^3=(x^5+4y)\left((x^5)^2-(x^5)(4y)+(4y)^2\right)$$
$$=(x^5+4y)(x^{10}-4x^5y+16y^2)$$

4 Factoriza la siguiente expresión: $(x+y)^3+(x-y)^3$.

Solución

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos y se sustituyen en la respectiva fórmula:

$$\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y \qquad\qquad \sqrt[3]{(x-y)^3}=x-y$$

Al aplicar la factorización de la suma de cubos, desarrollar y simplificar se obtiene:

$$(x+y)^3+(x-y)^3=\left((x+y)+(x-y)\right)\left((x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right)$$
$$=(x+y+x-y)(x^2+2xy+y^2-x^2+y^2+x^2-2xy+y^2)$$
$$=2x(x^2+3y^2)$$

5 Factoriza la siguiente expresión: $x - y$.

Solución

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos:

$$\sqrt[3]{x} \text{ y } \sqrt[3]{y}$$

Se aplica la factorización para una diferencia de cubos y el resultado es:

$$x - y = \left[\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{y}\right) + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right]$$
$$= \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

6 Factoriza la expresión: $8a^{\frac{3}{2}} + 27b^{\frac{6}{5}}$.

Solución

Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{8a^{\frac{3}{2}}} = 2a^{\frac{3}{(2)(3)}} = 2a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{27b^{\frac{6}{5}}} = 3b^{\frac{6}{(5)(3)}} = 3b^{\frac{2}{5}}$$

Se sustituyen las raíces en la fórmula y la factorización es:

$$8a^{\frac{3}{2}} + 27b^{\frac{6}{5}} = \left[2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{5}}\right) + \left(3b^{\frac{2}{5}}\right)^2\right]$$
$$= \left[2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[4a - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}} + 9b^{\frac{4}{5}}\right]$$

EJERCICIO 46

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $8x^3 - 1$
2. $x^3 + 27$
3. $8x^3 + y^3$
4. $27a^3 - b^3$
5. $8a^3 + 27b^6$
6. $64a^3 - 729$
7. $512 - 27a^9$
8. $x^6 - 8y^{12}$
9. $1 - 216m^3$
10. $a^3 - 125$
11. $27m^3 + 64n^9$
12. $343x^3 - 512y^6$
13. $a^6 + 125b^{12}$
14. $8x^6 + 729$
15. $27m^6 + 343n^9$
16. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$
17. $a^{\frac{3}{4}} - 8b^{\frac{3}{4}}$
18. $x^{\frac{3}{2}} + 125y^{\frac{9}{2}}$
19. $x^{3a+3} - y^{6a}$
20. $(x+2y)^3 - (2x-y)^3$
21. $(x-y)^3 + 8y^3$
22. $27m^3 - (3m+2n)^3$
23. $(a+b)^3 - (2a+3b)^3$
24. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma o diferencia de potencias impares iguales

Dadas las expresiones de la forma $a^n + b^n$ o $a^n - b^n$ siendo n un número impar, su factorización es de la siguiente forma:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $x^7 + y^7$.

Solución

Se extrae la raíz séptima de ambos términos:

$$\sqrt[7]{x^7} = x \qquad \sqrt[7]{y^7} = y$$

Se sustituye en su fórmula y se obtiene como resultado:

$$x^7 + y^7 = (x+y)\left(x^{7-1} - x^{7-2}y + x^{7-3}y^2 - x^{7-4}y^3 + x^{7-5}y^4 - x^{7-6}y^5 + y^6\right)$$
$$= (x+y)\left(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6\right)$$

2 Factoriza: $x^5 - 32$.

Solución

Se descompone 32 en sus factores primos y se aplica la fórmula:

$$x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x-2)\left(x^{5-1} + x^{5-2}(2) + x^{5-3}(2)^2 + x^{5-4}(2)^3 + (2)^4\right)$$
$$= (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$$

Finalmente, se tiene que: $x^5 - 32 = (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$

EJERCICIO 47

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^3 + 64y^3$
2. $a^7 - 128$
3. $243 - 32x^5$
4. $x^7 + 1$
5. $m^5 - n^5$
6. $x^7 - a^7b^7$
7. $1 - a^5$
8. $x^5y^5 + 3125$
9. $x^9 - 1$
10. $x^9 + 512$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factorización que combina un trinomio cuadrado perfecto y una diferencia de cuadrados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

Solución

La expresión $x^2 - 2xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Por tanto:

$$x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - a^2 = (x - y)^2 - a^2$$

Al factorizar la diferencia de cuadrados se obtiene finalmente:

$$= (x - y)^2 - a^2 = (x - y + a)(x - y - a)$$

2 Factoriza la siguiente expresión: $16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2$.

Solución

Se agrupan los términos de la siguiente manera y se factoriza el signo negativo:

$$\begin{aligned} 16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2 &= 16a^2 + (-m^2 - 8mn - 16n^2) \\ &= 16a^2 - (m^2 + 8mn + 16n^2) \end{aligned}$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$= 16a^2 - (m + 4n)^2$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} &= [4a + (m + 4n)][4a - (m + 4n)] \\ &= (4a + m + 4n)(4a - m - 4n) \end{aligned}$$

3 Factoriza: $a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6$.

Solución

Se agrupan los términos que forman trinomios cuadrados perfectos y posteriormente se factoriza la diferencia de cuadrados para que finalmente el resultado sea:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6 &= (a^2 - 2ab + b^2) - (25m^{10} - 40m^5n^3 + 16n^6) \\ &= (a - b)^2 - (5m^5 - 4n^3)^2 \\ &= [(a - b) + (5m^5 - 4n^3)][(a - b) - (5m^5 - 4n^3)] \\ &= (a - b + 5m^5 - 4n^3)(a - b - 5m^5 + 4n^3) \end{aligned}$$

EJERCICIO **48**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + 2m + 1 - 4n^2$
2. $y^2 - 6y + 9 - z^2$
3. $x^2 - y^2 + 10y - 25$
4. $m^4 - n^6 - 6n^3 - 9$
5. $49m^4 - 25m^2 - 9n^2 + 30mn$
6. $m^2 - 6x - 9 - x^2 + 2am + a^2$
7. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$
8. $m^2 - n^2 + 4 + 4m - 1 - 2n$
9. $2by - y^2 + 1 - b^2$
10. $25p^2 - 2m - m^2 - 1$
11. $m^2 - 16 - n^2 + 36 + 12m - 8n$
12. $x^2 + 2xy + y^2 - 16a^2 - 24ab^5 - 9b^{10}$
13. $100 - 60y + 9y^2 - m^2 + 2amp - a^2p^2$
14. $25b^2 + 10ab - 9n^2 + a^2 - 6mn - m^2$
15. $4m^2 - 9a^2 + 49n^2 - 30ab - 25b^2 - 28mn$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factorización para completar el trinomio cuadrado perfecto

- **Caso I trinomio de la forma $x^2 + bx + c$**

Ejemplo

Factoriza la expresión: $x^2 - 3x - 10$.

Solución

Se toma el coeficiente del término lineal y se divide entre 2 y el resultado se eleva al cuadrado.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Se suma y se resta $\frac{9}{4}$ al trinomio, se agrupan los términos y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto que resulta:

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10 = \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se reducen términos semejantes:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) = (x+2)(x-5)$$

Finalmente, la factorización queda como: $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$

- **Caso II trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$**

Ejemplo

Factoriza: $2x^2 + 5x + 2$.

Solución

Se factoriza el coeficiente del término cuadrático y se completa el trinomio para la expresión encerrada en el paréntesis:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16} + 1\right) = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Se multiplican por 2 los términos del primer factor y se obtiene como resultado:

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) = (2x+1)(x+2)$$

- **Caso III por adición y sustracción**

Ejemplo

Factoriza la expresión: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$.

Solución

El trinomio no es cuadrado perfecto, debido a que el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos, es:

$$2(2m^2)(3n^2) = 12m^2n^2$$

Ya que el segundo término es $3m^2n^2$, se le suma $9m^2n^2$ y se obtiene el término que se necesita para que el trinomio sea cuadrado perfecto, por consiguiente, se resta también $9m^2n^2$ para no alterar la expresión.

$$\begin{aligned} 4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 &= 4m^4 + 3m^2n^2 + 9m^2n^2 + 9n^4 - 9m^2n^2 \\ &= (4m^4 + 12m^2n^2 + 9n^4) - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2)^2 - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn) \end{aligned}$$

Finalmente: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 = (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn)$

EJERCICIO 49

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 3x + 2$
2. $x^2 - x - 20$
3. $m^2 - 7m + 10$
4. $x^2 - 2x - 48$
5. $a^2 - 6a - 40$
6. $n^2 + 3n - 54$
7. $3x^2 + 10x + 8$
8. $6m^2 + 7m + 2$
9. $3a^2 - a - 4$
10. $6x^2 - x - 12$
11. $n^4 + n^2 + 1$
12. $a^4 - 6a^2 + 1$
13. $m^8 + 4m^4n^4 + 16n^8$
14. $x^4 - 45x^2 + 100$
15. $64a^4 + 76a^2 + 49$
16. $121 + 21a^2b^2 + a^4b^4$
17. $36m^4 - 109m^2n^2 + 49n^4$
18. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
19. $a^4 - 7a^2b^2 + 9b^4$
20. $4m^8 - 53m^4n^4 + 49n^8$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Expresiones algebraicas donde se utilizan dos o más casos

Existen polinomios que se deben factorizar dos o más veces con diferentes métodos; a continuación se ejemplifican algunos de estos polinomios:

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $2x^3 + 6x^2 - 8x$.

Solución

Se obtiene el factor común:

$$2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4)$$

Se factoriza el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y se obtiene:

$$= 2x(x + 4)(x - 1)$$

2 Factoriza: $3m^4 - 243$.

Solución

Se factoriza 3 que es el factor común:

$$3m^4 - 243 = 3(m^4 - 81)$$

El binomio se factoriza con una diferencia de cuadrados:

$$= 3(m^2 - 9)(m^2 + 9)$$

La expresión $m^2 - 9$ se factoriza empleando nuevamente la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$= 3(m - 3)(m + 3)(m^2 + 9)$$

EJERCICIO 50

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^3 - 3x^2 - 28x$
2. $3a^2 - 3a - 6$
3. $3m^3 - 3m$
4. $y^4 - 3y^2 - 4$
5. $m^3 - m^2 - m + 1$
6. $6ax^2 - ax - 2a$
7. $x^4 - x^3 + x^2 - x$
8. $8ax^2 - 2a$
9. $a^5 + a^3 - 2a$
10. $64 - m^6$
11. $x^4 - 25x^2 + 144$
12. $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$
13. $a^9 - ab^8$
14. $a(x^3 + 1) + 3ax(x + 1)$
15. $a^6 - 25a^3 - 54$
16. $a^4 - a^3 + a - 1$
17. $4m^2y^3 - 4m^2$
18. $3mnp^2 + 3mnp - 18mn$
19. $256 - a^4$
20. $a^8 - b^8$
21. $8x^4 + 6x^2 - 2$
22. $5mxy^3 + 10my^2 - 5mxy - 10m$
23. $a^6 - 729$
24. $x^7 - xy^6$
25. $a^2(a^2 - b^2) - (2a - 1)(a^2 - b^2)$
26. $4a^5 + 4a^3 + 4a$
27. $m^3 - 4m - m^2 + 4$
28. $y^5 - 40y^3 + 144y$
29. $m^5 - m$
30. $6m^2y - 9m^3 - my^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Descomposición en factores de un polinomio por división sintética

Dado el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, su factorización es de la forma $(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots x_n$, se obtienen del cociente:

$$\text{Posibles factores del polinomio} = \frac{\text{factores de } a_n}{\text{factores de } a_0}$$

EJEMPLOS

1 Descompón por evaluación: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de x^3

Divisores de 12 = $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ Divisores de 1 = $\{\pm 1\}$

Se dividen los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de x^3

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones indicadas, si la última operación es cero, entonces, se resta a la literal para obtener un factor, este procedimiento se repite las veces que sea necesario como se ilustra a continuación:

1	−3	−4	12	2	Primer factor $(x - 2)$
	(2)(1) = 2	(2)(−1) = −2	(2)(−6) −12		
1	−1	−6	0	−2	Segundo factor $(x - (-2)) = (x + 2)$
	(−2)(1) = −2	(−2)(−3) = 6			
1	−3	0		3	Tercer factor $(x - 3)$
	(3)(1) = 3				
1	0				

Los x_1, x_2, x_3... son los valores para los que el residuo de la división sintética es cero, y el número de factores es el número de valores que la cumplen.

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio propuesto es:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)$$

2 Factoriza el polinomio: $6x^3 + x^2 - 31x + 10$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de x^3

Divisores de 10 = { ± 1, ± 2, ± 5, ± 10}   Divisores de 6 = { ± 1, ± 2, ± 3, ± 6}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{10}{3}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

6	1	–31	10	2	→ Primer factor $(x - 2)$
	12	26	–10		
6	13	–5	0	$\frac{1}{3}$	→ Segundo factor $\left(x - \frac{1}{3}\right)$
	2	5			
6	15	0		$-\frac{5}{2}$	→ Tercer factor $\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \left(x + \frac{5}{2}\right)$
	–15				
6	0				

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 6(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x - 2)(2x + 5)(3x - 1)$$

3 Factoriza el polinomio: $m^4 - 18m^2 + 81$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de m^4

Divisores de 81 = { ± 1, ± 3, ± 9, ±27, ± 81}   Divisores de 1 = { ± 1}

Posibles factores del polinomio: { ± 1, ± 3, ± 9, ±27, ± 81}

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se consideran los ceros de los términos cúbico y lineal y se efectúan las operaciones siguientes:

1	0	–18	0	81	3	→ Primer factor $(m - 3)$
	3	9	–27	–81		
1	3	–9	–27	0	3	→ Segundo factor $(m - 3)$
	3	18	27			
1	6	9	0		–3	→ Tercer factor $(m - (-3)) = (m + 3)$
	–3	0				
1	3	0			–3	→ Cuarto factor $(m - (-3)) = (m + 3)$
	–3					
1	0					

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$m^4 - 18m^2 + 81 = (m - 3)(m - 3)(m + 3)(m + 3) = (m - 3)^2(m + 3)^2$$

4 Factoriza el polinomio: $4y^4 - 9y^2 - 6y - 1$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de y^4.

Divisores de 1 = { ± 1} Divisores de 4 = { ± 1, ± 2, ± 4}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se considera al cero del término cúbico y se efectúan las operaciones siguientes:

4	0	−9	−6	−1	−1	→ Primer factor $(y+1)$
	−4	4	5	1		
4	−4	−5	−1	0	$-\frac{1}{2}$	→ Segundo factor $\left(y+\frac{1}{2}\right)$
	−2	3	1			
4	−6	−2	0			→ Tercer factor $(4y^2 - 6y - 2)$

La expresión $4y^2 - 6y - 2$ únicamente se puede factorizar de la siguiente manera:

$$4y^2 - 6y - 2 = 2(2y^2 - 3y - 1)$$

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$4y^4 - 9y^2 - 6y - 1 = (y+1)\left(y+\frac{1}{2}\right)2\left(2y^2 - 3y - 1\right) = (y+1)(2y+1)(2y^2 - 3y - 1)$$

EJERCICIO 51

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $b^3 - b^2 - b + 1$
2. $w^3 + 2w^2 - w - 2$
3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
4. $x^3 + x^2 - 14x - 24$
5. $4x^3 - 7x + 3$
6. $m^3 + 2m^2 + m + 2$
7. $6y^3 + y^2 - 11y - 6$
8. $a^4 - 10a^2 + 9$
9. $3x^3 + 4x^2 - 59x - 20$
10. $m^4 + 6m^3 + 3m + 140$
11. $n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 4n + 4$
12. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
13. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$
14. $x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6$
15. $a^5 - 30a^3 - 25a^2 - 36a - 180$
16. $2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 16x - 12$
17. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 32x - 24$
18. $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 13x^2 + 77x - 30$
19. $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$
20. $2x^6 - 3x^5 - 35x^4 - 2x^2 + 3x + 35$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 5

Fracciones algebraicas

Reseña HISTÓRICA

Nicolás de Cusa (1401-1464)

Cardenal alemán nacido en Cusa y fallecido en Lodi (Italia). Más filósofo que matemático, a él se debe la crítica a los conceptos de la noción de infinito: "...para alcanzar el maximum y el minimum hay que trascender la serie indefinida de lo grande y lo pequeño, y entonces se descubre que el maximum y el minimum coinciden en la idea de infinito...".

Nicolás de Cusa vio que uno de los puntos débiles del pensamiento escolástico de la época, en lo que se refiere a la ciencia, había sido su incapacidad para medir, mientras que él pensaba que el conocimiento debería sustentarse en la medida. Sus teorías filosóficas neoplatónicas sobre la concordancia de los contrarios, le condujo a pensar que los máximos y los mínimos están siempre en relación.

Nicolás de Cusa (1401-1464)

Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es el término o polinomio que divide exactamente a todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el MCD:

- Se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes.
- Se toman los factores (monomio o polinomio) de menor exponente que tengan en común y se multiplican por el máximo común divisor de los coeficientes.

EJEMPLOS

1 Encuentra el máximo común divisor de: $15x^2y^2z$, $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

Solución

Se obtiene el MCD de 15, 24 y 36

15	24	36	3
5	8	12	

MCD = 3

Se toman los factores que tengan en común y se escogen los de menor exponente, en este caso: y^2, z
Finalmente, el máximo común divisor: $3y^2z$

2 Obtén el MCD de los siguientes polinomios:

$$4m^2 + 8m - 12,\ 2m^2 - 6m + 4,\ 6m^2 + 18m - 24;$$

Solución

Se factorizan los polinomios:

$$4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$$
$$2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$$
$$6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$$

Se obtiene el MCD de 4, 2 y 6

4	2	6	2
2	1	3	

El MCD de los coeficientes 2, 4 y 6 es 2.
El MCD de los factores es $m - 1$
Por tanto, el MCD de los polinomios es: $2(m - 1)$

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es el término algebraico que se divide por todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el mínimo común múltiplo:

- Se obtiene el mcm de los coeficientes.
- Se toman los factores que no se repiten y, de los que se repiten, el de mayor exponente, y se multiplican por el mínimo común múltiplo de los coeficientes.

EJEMPLOS

1 Determina el mcm de las siguientes expresiones $15x^2y^2z$; $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

Solución

Se encuentra el mcm de 15, 24, 36

15	24	36	2
15	12	18	2
15	6	9	2
15	3	9	3
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1	1	

$$\text{mcm} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

El mcm de los coeficiente 15, 24 y 36 es 360

Se toman todos los factores y se escogen los de mayor exponente en el caso de aquellos que sean comunes y, los que no, se escriben igual.

$$x^2y^4z^2$$

Finalmente, el mcm es 360 $x^2y^4z^2$

2 Encuentra el mcm de $4m^2 + 8m - 12$; $2m^2 - 6m + 4$; $6m^2 + 18m - 24$.

Solución

Se factorizan los polinomios y se escogen los factores:

$$4m^2 + 8m - 12 = 4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$$
$$2m^2 - 6m + 4 = 2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$$
$$6m^2 + 18m - 24 = 6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$$

Se obtiene el mcm de los coeficientes de 4, 2 y 6

4	2	6	2
2	1	3	2
1	1	3	3
1	1	1	

$$\text{mcm} = 2^2 \times 3 = 12$$

El mcm de 4, 2 y 6 es 12

El mcm de los factores es: $(m + 3)(m - 2)(m + 4)(m - 1)$

Por consiguiente, el mcm es: $12(m + 3)(m - 1)(m - 2)(m + 4)$

EJERCICIO **52**

Determina el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones:

1. $35x^2y^3z^4$; $42x^2y^4z^4$; $70x^2y^5z^2$
2. $72m^3y^4$; $96m^2y^2$; $120m^4y^5$
3. $4x^2y$; $8x^3y^2$, $2x^2yz$; $10xy^3z^2$
4. $39a^2bc$; $52ab^2c$; $78abc^2$

5. $60m^2n^x$; $75m^4n^{x+2}$; $105mn^{x+1}$
6. $22x^ay^b$; $33x^{a+2}y^{b+1}$; $44x^{a+1}y^{b+2}$
7. $18a^2(x-1)^3$; $24a^4(x-1)^2$; $30a^5(x-1)^4$
8. $27(a-b)(x+y)^2$; $45(a-b)^2(x+y)$
9. $24(2x+1)^2(x-7)$; $30(x+8)(x-7)$; $36(2x+1)(x+8)^2$
10. $38(a^3+a^3b)$; $57a(1+b)^2$; $76a^4(1+b)^3$
11. $xy+y$; x^2+x
12. m^3-1; m^2-1
13. m^2+mn; $mn+n^2$; m^3+m^2n
14. x^2-y^2; $x^2-2xy+y^2$
15. $3x^2-6x$; x^3-4x; x^2y-2xy; x^2-x-2
16. $3a^2-a$; $27a^3-1$; $9a^2-6a+1$
17. m^2-2m-8; m^2-m-12; m^3-9m^2+20m
18. $2a^3-2a^2$; $3a^2-3a$; $4a^3-4a^2$
19. $12b^2+8b+1$; $2b^2-5b-3$
20. y^3-2y^2-5y+6; $2y^3-5y^2-6y+9$; $2y^2-5y-3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica contiene literales y se simplifica al factorizar al numerador y al denominador y al dividir aquellos factores que se encuentren en ambas posiciones, como a continuación se ejemplifica.

EJEMPLOS

1. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{8a^2+12ab}{8a^2}$.

Solución

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{8a^2+12ab}{8a^2}=\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(4a)$ la cual se procede al simplificar

$$\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}=\frac{2a+3b}{2a}$$

2. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{3m}{15m-12m^2}$.

Solución

Se factorizan el numerador y el denominador, simplificando el término que se repite en ambos $(3m)$

$$\frac{3m}{15m-12m^2}=\frac{1(3m)}{(3m)(5-4m)}=\frac{1}{5-4m}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}$.

Solución

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}=\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(x-2y)$ la cual se procede a simplificar

$$\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}=\frac{6xy}{x+2y}$$

4 Simplifica $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}=\frac{(x-3)^2}{x(x+a)-3(x+a)}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}$$

En esta fracción el elemento que se repite en el numerador y denominador es $(x-3)$, entonces se realiza la simplificación

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}=\frac{x-3}{x+a}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}=\frac{x\left(9-x^2\right)}{x^2\left(x^2-x-6\right)}=\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}$$

Los factores que se repiten son (x) y $(x-3)$

$$\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}=\frac{(3+x)(-1)}{x(x+2)}=-\frac{x+3}{x(x+2)}$$

6 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(3x+1)(x+3)(x-4)}{(x-5)(3x+1)(x-4)}$$

Los factores que se repiten en el numerador y denominador $(3x+1)$ y $(x-4)$, se dividen, obteniéndose la simplificación de la fracción

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(x+3)}{(x-5)}=-\frac{x+3}{x-5}$$

EJERCICIO 53

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2a^2+2ab}{3a^2b}$
2. $\frac{6a^3b^2}{3a^2b-6ab^2}$
3. $\frac{4a^2+12a}{8a^2}$
4. $\frac{6m^3-18m^2-24m}{15m-9m^2}$
5. $\frac{m^3n-m^2n^2}{n^2-m^2}$
6. $\frac{4x^2-12x}{2x^3-2x^2-12x}$
7. $\frac{x^2-3xy-10y^2}{5y^2+4xy-x^2}$
8. $\frac{x^2+7x-78}{x^2-36}$
9. $\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n-3}$
10. $\frac{2x^2-xy-6y^2}{3x^2-5xy-2y^2}$
11. $\frac{-x^4+3x^3y-2x^2y^2}{5x^3-4x^2y-xy^2}$
12. $\frac{3x^2+10xy+8y^2}{x^2-xy-6y^2}$
13. $\frac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$
14. $\frac{8-x^3}{x^2+2x-8}$
15. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$
16. $\frac{y^3-27x^3}{y^2-xy-6x^2}$
17. $\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x-2}$
18. $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3-3xy^2+2y^3}$
19. $\frac{3ax-bx-3ay+by}{by^2-bx^2-3ay^2+3ax^2}$
20. $\frac{a^2+ab-ad-bd}{2a^2b+2ab^2}$
21. $\frac{y^3+y^2-6y}{3ay^2+9ay+2y^2+6y}$
22. $\frac{3x^2-3xy}{yz-xz-yw+xw}$
23. $\frac{w^2+w-2}{x-wx-y+wy}$
24. $\frac{p+1-p^3-p^2}{p^3-p-2p^2+2}$
25. $\frac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$
26. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+4x^2+x-6}$
27. $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+x^2-14x-24}$
28. $\frac{y^3-9y^2+26y-24}{y^3-5y^2-2y+24}$
29. $\frac{(y-1)(y^2-8y+16)}{(y^2-4y)(1-y^2)}$
30. $\frac{(a-2)^2(a^2+a-12)}{(2-a)(3-a)^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta de fracciones con denominador común

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\frac{2a-a^2b}{a^2b}+\frac{3a+4a^2b}{a^2b}$.

Solución

Se simplifica cada fracción, si es posible.

$$\frac{2a-a^2b}{a^2b}=\frac{a(2-ab)}{a^2b}=\frac{2-ab}{ab};\qquad \frac{3a+4a^2b}{a^2b}=\frac{a(3+4ab)}{a^2b}=\frac{3+4ab}{ab}$$

Se suman las nuevas expresiones.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}$$

Como los denominadores son comunes, en la fracción resultante sólo se reducen los numeradores y el denominador permanece igual.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}=\frac{2-ab+3+4ab}{ab}=\frac{5+3ab}{ab}$$

2 Encuentra el resultado de $\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}$.

Solución

En este caso ningún sumando se puede simplificar, entonces el común denominador es $2m-n$, y sólo se reducen los numeradores.

$$\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}=\frac{2m+n+5m-5n+n-m}{2m-n}=\frac{6m-3n}{2m-n}=\frac{3(2m-n)}{2m-n}=3$$

EJERCICIO 54

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2x^2-7x}{8x^2}+\frac{6x^2+x}{8x^2}$
2. $\frac{1-a^2}{a}-\frac{7-2a^2}{a}$
3. $\frac{7n-1}{10n}+\frac{8n-4}{10n}$
4. $\frac{7m^2-6m}{4mn}+\frac{12m^2-3m}{4mn}$
5. $\frac{35n-7}{5n^2-n}-\frac{15n-3}{5n^2-n}$
6. $\frac{11y^2-14y}{6y^2}-\frac{2y^2+y}{6y^2}$
7. $\frac{12x^2-x+5}{22x}+\frac{6+x-x^2}{22x}$
8. $\frac{13x-y}{3x-2y}+\frac{5x-3y}{3x-2y}-\frac{3x+6y}{3x-2y}$
9. $\frac{6a+5b}{8a-2b}-\frac{a+6b}{8a-2b}+\frac{3a-b}{8a-2b}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta de fracciones con denominadores diferentes

EJEMPLOS

1 Efectúa la siguiente operación: $\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}$.

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realizan las operaciones correspondientes.

$$\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}=\frac{3x\left(2x^2\right)+5y\left(y^2\right)}{4x^2y^2}=\frac{6x^3+5y^3}{4x^2y^2}$$

2 Realiza la siguiente operación y simplificar al máximo: $\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$.

Solución

Se obtiene el común denominador de los denominadores "$x+h$" y "x", posteriormente se procede a realizar la diferencia de fracciones

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x(x+h)}=\frac{-h}{x(x+h)}$$

3 Efectúa $\frac{3x}{x^2-6x+9}+\frac{4}{x-3}$.

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se efectúan las operaciones:

$$\frac{3x}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3x(1)+4(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{3x+4x-12}{(x-3)^2}=\frac{7x-12}{(x-3)^2}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$.

Solución

Se determina el común denominador, éste se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su numerador, los productos se reducen al máximo.

$$\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+2xh+h^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1(x^2-1)-1(x^2+2xh+h^2-1)}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2-1-x^2-2xh-h^2+1}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}=\frac{-2xh-h^2}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

5 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

A los enteros se les coloca la unidad como denominador:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}$$

Luego, el común denominador es $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, por tanto

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}=\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

se aplica la propiedad $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ y se simplifica al máximo el numerador, entonces:

$$\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

6 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}$.

Solución

El común denominador de esta diferencia de fracciones es $(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$, entonces:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{x^3-(x^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-(x^3-1)}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-x^3+1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es:

$$\frac{x^3}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}-\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

7 Efectúa y simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Solución

El común denominador es el producto de los denominadores:

$$\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se realiza la operación:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{x^3+x-x^3+x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

En el denominador los factores están elevados al mismo exponente, se pueden multiplicar las bases, las cuales dan como resultado una diferencia de cuadrados, por tanto:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{\left(x^4-1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

8 Simplifica la siguiente operación: $\dfrac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

Solución

Se obtiene el común denominador y se procede a realizar la diferencia:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)-2(x+1)}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-2-2x-2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

Por último se simplifica el numerador, entonces:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{-x-4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=-\frac{x+4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

9 Realiza y simplifica la operación $\frac{a+b}{a^2-ab-20b^2}-\frac{a+4b}{a^2-4ab-5b^2}+\frac{a+5b}{a^2+5ab+4b^2}$.

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$a^2-ab-20b^2=(a-5b)(a+4b)$$
$$a^2-4ab-5b^2=(a-5b)(a+b)$$
$$a^2+5ab+4b^2=(a+4b)(a+b)$$

La expresión con los denominadores factorizados es:

$$\frac{a+b}{(a-5b)(a+4b)}-\frac{a+4b}{(a-5b)(a+b)}+\frac{a+5b}{(a+4b)(a+b)}$$

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores: $(a-5b)(a+4b)(a+b)$
Se resuelve la fracción:

$$=\frac{(a+b)(a+b)-(a+4b)(a+4b)+(a-5b)(a+5b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-8ab-16b^2+a^2-25b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2-6ab-40b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$

El numerador se factoriza, si es posible, para simplificar al máximo, entonces

$$=\frac{(a-10b)(a+4b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a-10b}{(a-5b)(a+b)}$$

EJERCICIO 55

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones algebraicas:

1. $\frac{x-2}{4x}+\frac{x+5}{10x}$
2. $\frac{x+1}{2x}+\frac{2x+3}{3x}$
3. $\frac{x-4}{9x^2}+\frac{x-3}{6x}$
4. $\frac{2x+5}{6x}-\frac{x+6}{4x^2}$
5. $\frac{1}{x+h+2}-\frac{1}{x+2}$
6. $\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}$
7. $\frac{2}{(x+h)^2-3}-\frac{2}{x^2-3}$
8. $\frac{(x+h)^2}{(x+h)^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}$
9. $\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}$
10. $\frac{2}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-1}$
11. $\frac{4x}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}$
12. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x^2-1}$

13. $\dfrac{7x}{x^2+6x+9}+\dfrac{1}{x^2-9}$

14. $2x(x-2)^{\frac{1}{3}}-\dfrac{x^2}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

15. $12x^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{3x^5}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

16. $\dfrac{3x(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}$

17. $\dfrac{-2x(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{3(5-x^2)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{4x(5-x^2)^{\frac{1}{3}}}{3(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$

18. $\dfrac{(8x-3)(4x^2+3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2-3x)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{(8x+3)(4x^2-3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}$

19. $\dfrac{x+1}{x^2+x-12}-\dfrac{12}{x^2+5x-24}$

20. $\dfrac{2x^2+8}{2x^2+2x-12}-\dfrac{5x-6-x^2}{x^2+2x-8}$

21. $\dfrac{4x-5}{x^2+x-12}+\dfrac{9}{18-3x-x^2}+\dfrac{2}{x^2+10x+24}$

22. $\dfrac{1}{2x^2+11x+15}+\dfrac{6x+7}{3x^2+7x-6}-\dfrac{19}{6x^2+11x-10}$

23. $\dfrac{m+n}{m^2-mn+n^2}-\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{3m^2}{m^3+n^3}$

24. $\dfrac{3x+2y}{x^2+3xy-10y^2}-\dfrac{5x+y}{x^2+4xy-5y^2}+\dfrac{4x-y}{x^2-3xy+2y^2}$

25. $\dfrac{a-b}{3a+3b}-\dfrac{a-2b}{6a-6b}+\dfrac{a^2+2ab-6b^2}{9a^2-9b^2}$

26. $\dfrac{r+3s}{s+r}-\dfrac{3s^2}{s^2-r^2}+\dfrac{r}{s-r}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación de fracciones algebraicas

Regla para multiplicar fracciones:

- Descomponer en factores los elementos de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se simplifican aquellos términos que sean comunes en el numerador y denominador de las fracciones que se van a multiplicar.
- Multiplicar todos los términos restantes.

EJEMPLOS

1 Multiplica $\dfrac{2x^2}{3y}\cdot\dfrac{6y^2}{4x}\cdot\dfrac{5xy}{2y}$.

Solución

Se realiza la multiplicación de fracciones y se simplifica el resultado

$$\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{6y^2}{4x}\cdot\frac{5xy}{2y}=\frac{60x^3y^3}{24xy^2}=\frac{5x^2y}{2}$$

2 Simplifica: $\dfrac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\dfrac{5m-25}{5m+15}$.

Solución

Se factoriza cada uno de los elementos

$$\frac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\frac{5m-25}{5m+15}=\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}$$

(continúa)

(*continuación*)
se procede a realizar la multiplicación y la simplificación

$$\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}=\frac{5(m+6)(m+3)(m-5)}{5(m-5)(m+3)}=m+6$$

3 Efectúa y simplifica: $\frac{a^2-5a+6}{3a-15}\cdot\frac{6a}{a^2-a-30}\cdot\frac{a^2-25}{2a-4}$.

Solución

$$\frac{(a-3)(a-2)}{3(a-5)}\cdot\frac{2\cdot 3a}{(a-6)(a+5)}\cdot\frac{(a+5)(a-5)}{2(a-2)}=\frac{(a-3)(a-2)2\cdot 3a(a+5)(a-5)}{3(a-5)(a-6)(a+5)2(a-2)}$$

$$=\frac{6a(a-3)(a-2)(a+5)(a-5)}{6(a-5)(a-6)(a+5)(a-2)}=\frac{a(a-3)}{a-6}$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es $\frac{a(a-3)}{a-6}=\frac{a^2-3a}{a-6}$

EJERCICIO 56

Efectúa la multiplicación de las fracciones algebraicas y simplifica:

1. $\frac{4a^2}{7x^3}\cdot\frac{14x}{5b^4}\cdot\frac{5b^2}{7a^3}$
2. $\frac{5}{x}\cdot\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{3y}{10}$
3. $\frac{3x}{10y^2}\cdot\frac{5y^4}{14ab}\cdot\frac{7a}{6x^2}$
4. $\frac{16ab^2}{5a^2x}\cdot\frac{10x^3}{4b^3}\cdot\frac{2a^2}{3bx}$
5. $\frac{3x^2}{4b}\cdot\frac{b^2}{2y^2}\cdot\frac{2y}{3x^3}$
6. $\frac{5m+25}{14}\cdot\frac{7m+7}{10m+50}$
7. $\frac{b^2-5b+6}{3b-15}\cdot\frac{b^2-25}{2b-4}\cdot\frac{6b}{b^2-b-30}$
8. $\frac{2m^3+2mn^2}{2mx^2-2mx}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^3-x}{m^2x+n^2x}$
9. $\frac{14x^2-21x}{24x-16}\cdot\frac{12x-8}{42x-63}$
10. $\frac{30x^3-18x^2}{6x^3+5x^2}\cdot\frac{42x+35}{60x-36}$
11. $\frac{7x^2+42x}{3x^2-6x}\cdot\frac{15x-30}{14x^2+84x}$
12. $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$
13. $\frac{x^2-10x+24}{30+x-x^2}\cdot\frac{x^2-2x-48}{x^2-12x+32}$
14. $\frac{8x^2+10x+3}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$
15. $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$
16. $\frac{x^2+9x+18}{2x^2+9x+9}\cdot\frac{2x^2+7x+6}{4x^2+9x+2}$
17. $\frac{x^3+2x^2-3x}{4x^2+8x+3}\cdot\frac{2x^2+3x}{x^2-x}$
18. $\frac{x^3-27}{a^3-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$
19. $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$
20. $\frac{2n^2+5n-3}{n^2-2n-8}\cdot\frac{n^2+4n+4}{6n^2-5n+1}\cdot\frac{3n^2+11n-4}{n^2+5n+6}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de fracciones algebraicas

Regla para dividir fracciones:

- Primero se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, de lo que resulta el numerador de la fracción solución; el denominador de la fracción solución se obtiene al multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. De preferencia los productos se dejan indicados.
- Se simplifican los términos o factores que sean comunes, en el numerador y denominador, de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se multiplican todos los términos restantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente división: $\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3}$.

Solución

Se efectúan los productos cruzados y se simplifica la expresión

$$\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3} = \frac{(m^2)(n^3)}{3n^2(2m)} = \frac{m^2n^3}{6mn^2} = \frac{mn}{6}$$

2 Simplifica la siguiente división: $\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}}$.

Solución

Se realiza el producto de medios por medios y extremos por extremos, para después simplificar al máximo.

$$\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}} = \frac{3x^2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{3x}{x^2+1}$$

3 Realiza el siguiente cociente y simplifica: $\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6}$.

Solución

Se factorizan todos los elementos y se procede a efectuar la simplificación.

$$\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6} = \frac{a(a-1)(a+1)}{2a(a+3)} \div \frac{5a(a-1)}{2(a+3)} = \frac{a(a-1)(a+1)(2)(a+3)}{(2a)(5a)(a-1)(a+3)} = \frac{a+1}{5a}$$

4 Simplifica la siguiente operación:

$$\frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Solución

En este caso se tiene una fracción sobre un entero, al que se le agrega la unidad como denominador, para después realizar el producto de medios y extremos, entonces:

$$\frac{\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(x^2+1\right)}=\frac{\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\left(x^2+1\right)}{1}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5 Resuelve la siguiente división: $\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2}\div\frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}$.

Solución

Se factoriza cada uno de los factores y se procede a realizar la división

$$\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2}\div\frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}=\frac{(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(x+y)}\div\frac{(3x+2y)(2x+y)}{(3x+2y)(x+y)}$$

$$=\frac{(2x+y)(2x-y)(3x+2y)(x+y)}{(2x-y)(x+y)(3x+2y)(2x+y)}=1$$

6 Efectúa y simplifica la siguiente operación: $\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-1-\frac{9}{x-1}\right)$.

Solución

Se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis:

$$\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-1-\frac{9}{x-1}\right)=\left(\frac{x^2+5x+4+2}{x+1}\right)\div\left(\frac{x^2-2x+1-9}{x-1}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+5x+6}{x+1}\right)\div\left(\frac{x^2-2x-8}{x-1}\right)$$

Se factorizan los polinomios resultantes y se resuelve la división:

$$\frac{(x+3)(x+2)}{x+1}\div\frac{(x-4)(x+2)}{x-1}=\frac{(x+3)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-4)(x+2)}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}$$

EJERCICIO **57**

Realiza las siguientes operaciones y simplifica al máximo:

1. $\frac{2x^3}{y^2}\div\frac{8x^5}{3y^3}$

2. $\frac{12a^4b^5}{15x^6y^3}\div\frac{4a^2b}{5x^2y^3}$

3. $\frac{\frac{6x^2}{(2x+3)^3}}{\frac{2x^4}{(2x+3)}}$

4. $\frac{\frac{12x^5}{\left(2x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{2x^2}{\left(2x^3+1\right)^{\frac{2}{3}}}}$

5. $\dfrac{\dfrac{4x^3}{3x^2-3xy}}{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}$

6. $\dfrac{x^3+x}{x^2-x}\div\dfrac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$

7. $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-10x+9}$

8. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5}\div\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+8x+7}$

9. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}\div\dfrac{x^2+12x+32}{x^2+3x-40}$

10. $\dfrac{4x^2-23x-6}{3x^2-14x+8}\div\dfrac{4x^2+25x+6}{x^2+x-30}$

11. $\dfrac{6x^2-5x+1}{12x^2-x-1}\div\dfrac{4x^2-8x-5}{8x^2+6x+1}$

12. $\dfrac{x^2-16}{x^3-3x^2+9x}\div\dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

13. $\dfrac{8x^2-2x-3}{16x^3-9x}\div\dfrac{4x^2-1}{4x^2+3x}$

14. $\dfrac{\dfrac{x^3-121x}{x^3-49x}}{\dfrac{x^2-11x}{x+7}}$

15. $\dfrac{\dfrac{x^3+125}{x^2-64}}{\dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}}$

16. $\dfrac{\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2}}{\dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a}}$

17. $\dfrac{15x^2+7x-2}{25x^3-x}\div\dfrac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}$

18. $\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\dfrac{2a}{b}\right)$

19. $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)$

20. $\left(n-\dfrac{2n-1}{n^2+2}\right)\div\left(n^2+1-\dfrac{n-1}{n}\right)$

21. $\left(a+b+\dfrac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)$

22. $\left(1-\dfrac{1}{x^3+2}\right)\div\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Combinación de operaciones con fracciones

La simplificación de este tipo de operaciones, en las que se combinan operaciones básicas, se basa en la jerarquización de operaciones de izquierda a derecha, como sigue:

- Divisiones y productos
- Sumas y restas

EJEMPLOS

1 Efectúa y simplifica la siguiente fracción algebraica

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}\div\frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$$

Solución

Se factoriza cada uno de los polinomios de la expresión

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}\div\frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}=\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}\div\frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}$$

(continúa)

(*continuación*)

Se realiza el producto

$$\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}$$

Por último, se realiza la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}\div\frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}=\frac{x(x+2)(2x+1)(x-4)}{(x+1)(2x+1)(x-4)(x+2)}=\frac{x}{x+1}$$

2 Realiza y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2-3x-10}{x^2-4x-5}-\frac{x}{x+1}$$

Solución

Se factorizan las expresiones y se aplica la jerarquía de las operaciones

$$\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)(x+2)}\cdot\frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)(x-5)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{x+5}{x+3}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)-x(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+6x+5-x^2-3x}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{3x+5}{(x+3)(x+1)}$$

EJERCICIO 58

Efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-49}\cdot\dfrac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\dfrac{x^2-5x-24}{x+5}$
2. $\dfrac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\cdot\dfrac{a^2-36}{a^3-1}\div\dfrac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$
3. $\dfrac{6a^2-7a-3}{a^2-1}\div\dfrac{4a^2-12a+9}{a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a-3}{3a^2-2a-1}$
4. $\dfrac{2t^2+5t+2}{t^2-4t+16}\div\dfrac{t+2}{t^3+64}\div\dfrac{2t^3+9t^2+4t}{t+1}$
5. $\dfrac{2}{x+3}\div\dfrac{3x+3}{x^2-2x-8}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$
6. $\dfrac{3x^2+3x}{3x^2-8x+4}\cdot\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}-\dfrac{2x}{2x-1}$
7. $\dfrac{6x^2-12x}{2x^2+3x-9}\div\dfrac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3}-\dfrac{3}{x+1}$

8. $\frac{x^4-27x}{x^2+7x-30}\cdot\frac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x}\div\frac{x^2-100}{x-3}$

9. $\frac{8x^2-10x-3}{6x^2+13x+6}\cdot\frac{4x^2-9}{3x^2+2x}\div\frac{8x^2+14x+3}{9x^2+12x+4}$

10. $\frac{x^2-x-12}{x^2+x-2}\div\frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-10}\div\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-15}$

11. $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-1}+\frac{2x^2-4x}{x^2+x-6}$

12. $\frac{x^3-5x^2}{x^3-25x}\div\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}\cdot\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones complejas

En una fracción compleja el numerador y el denominador se conforman por operaciones algebraicas.

EJEMPLOS

1 Simplifica la expresión $\left(m+\frac{m}{n}\right)\div\left(n-\frac{1}{n}\right)$.

Solución

Se realizan las operaciones dentro de los paréntesis,

$$\left(m+\frac{m}{n}\right)\div\left(n-\frac{1}{n}\right)=\frac{mn+m}{n}\div\frac{n^2-1}{n}$$

se resuelve la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{n(mn+m)}{n(n^2-1)}=\frac{nm(n+1)}{n(n+1)(n-1)}=\frac{m}{n-1}$$

2 Realiza y simplifica la fracción $\dfrac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}$.

Solución

Se resuelve tanto el numerador como el denominador y se factorizan los polinomios resultantes, si es posible

$$\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}=\frac{\frac{(y-1)(y+3)-5}{y+3}}{\frac{(y+5)(y+3)-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-3-5}{y+3}}{\frac{y^2+8y+15-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-8}{y+3}}{\frac{y^2+8y-20}{y+3}}$$

$$=\frac{\frac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\frac{(y+10)(y-2)}{y+3}}$$

(*continúa*)

(*continuación*)
Se dividen las fracciones y se simplifica al máximo

$$=\frac{(y+3)(y+4)(y-2)}{(y+3)(y+10)(y-2)}=\frac{y+4}{y+10}$$

3 Efectúa y simplifica: $\dfrac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}$.

Solución

Se eligen las operaciones secundarias y se reducen hasta simplificar la fracción al máximo:

$$\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b(b+1)-(b-2)}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+b-b+2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+2}{b+1}}}$$

$$=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{(b+1)(b^2+2)}{b^2+2}}=\frac{b-1}{b+2-(b+1)}=\frac{b-1}{1}=b-1$$

4 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}$$

Solución

Se resuelve la parte superior de la fracción principal

$$\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)-(x+2)}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-4}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

Luego, la fracción original se escribe como:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{x-2}{1}}$$

Se realiza la división de fracciones y la simplificación es:

$$\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

EJERCICIO 59

Simplifica las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}}$

3. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{y}{3}-1}}$

4. $\dfrac{m+4+\dfrac{3}{m}}{m-4-\dfrac{5}{m}}$

5. $\dfrac{y^2-\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{1}{y}}$

6. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$

7. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{x^2-y^2}{x+y}}{\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x}}$

8. $\dfrac{1-\dfrac{7}{n}+\dfrac{12}{n^2}}{n-\dfrac{16}{n}}$

9. $\dfrac{a-3b-\dfrac{5b^2}{a+b}}{a-2b-\dfrac{4b^2}{a+b}}$

10. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x^2}{y}}$

11. $\dfrac{\left(a-2b+\dfrac{4b^2}{a+3b}\right)\left(a+2b-\dfrac{b^2}{a+2b}\right)}{1+\dfrac{a}{b}}$

12. $\left(1+\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a+b}}\right)\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}b-\dfrac{\dfrac{7}{4}b^2}{2a+3b}\right)$

13. $\dfrac{\dfrac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2x+3)^{\frac{1}{2}}}}{2x+3}$

14. $\dfrac{2x\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{x^3}{\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}}}{x^2-5}$

15. $\dfrac{\dfrac{(3x-1)^{\frac{1}{3}}}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$

16. $\dfrac{\dfrac{\left(5x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{10x^{\frac{4}{3}}}{3\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 6

Ecuaciones de primer grado

Reseña HISTÓRICA

A principios del siglo XIX tres matemáticos, Ruffini, Abel y Galois, encararon el problema de resolver una ecuación desde un punto de vista radicalmente diferente.

Más que a Ruffini y Abel, es Evariste Galois a quien le cabe el título de fundador del álgebra moderna.

Galois nació el 25 de octubre de 1811 en Bourg-la Reine, hasta los 12 años de edad lo educó su madre, mujer culta y esclarecida. En 1823 viaja a París para internarse en el Liceo Louis le Grand, institución famosa por el rigor de su disciplina.

A principios de 1827 despierta su interés por la matemática, disciplina a la que de inmediato se dedica por completo, descuidando los estudios de griego, latín, francés, retórica, considerados más importantes.

Galois publicó, en abril de 1829, su primer artículo científico: un teorema sobre las fracciones continuas periódicas. Al mes siguiente presentó a la Academia de Ciencias sus primeras investigaciones sobre las ecuaciones algebraicas de primer grado, trabajo que fue recibido con frialdad y desinterés por Cauchy, el mayor matemático de la época y presidente de la Academia. En ese mismo año el joven matemático entró en la École Préparatoire, institución destinada a formar profesores. Dos meses después era bachiller en letras y en ciencias.

Evariste Galois (1811-1832)

Conceptos generales

Igualdad. Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.

Ejemplos

$(2+3)^2 = 25$ $\qquad$ $(4)^2 + (3)^2 = 25$ $\qquad$ $\sqrt{625} = 25$

Entonces $(2+3)^2$, $(4)^2 + (3)^2$, $\sqrt{625}$ son expresiones equivalentes ya que todas valen 25

¿Podríamos decir que $x + 3 = 8$ es una igualdad?

Ecuación. Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.

Ejemplos

La fórmula $v = \dfrac{d}{t}$ se utiliza para encontrar la velocidad constante de un móvil del que se conoce la distancia recorrida y el tiempo que empleó en recorrerla.

La fórmula $A = \pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un círculo dada la longitud de su radio.

También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real.

Ejemplos

$x + 2 = 8$ $\qquad$ $x + y = 6$ $\qquad$ $x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{5}{x+2}$

Las ecuaciones están formadas de la siguiente manera:

1er miembro = 2do miembro

Solución de una ecuación. La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.

Ejemplos

1. Para la ecuación $x + 2 = 10$, la solución es $x = 8$, ya que al sustituir con 8 a la literal x, se obtiene: $8 + 2 = 10$
2. Para la ecuación $x + y = 8$, una solución es $x = 3$, $y = 5$; porque: $3 + 5 = 8$
3. Para la ecuación $x^2 - 4 = 0$, las soluciones son: $x = -2$, $x = 2$ porque:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0\ ,\ (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Grado de una ecuación. El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).

Ejemplos

1. La ecuación $2x + 3 = 5$, es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1
2. La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2
3. La ecuación $x + y = 6$, es de primer grado, porque las variables tienen exponente 1

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineales.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $2x + 3 = 7$.

Solución

Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en el primer miembro y las constantes en el segundo, se aplican sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, según corresponda.

$2x + 3 = 7$	$\rightarrow$	$(2x + 3) - 3 = 7 - 3$	Se resta 3 en ambos miembros
		$2x = 4$	Al simplificar
		$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(4)$	Se multiplica por $\frac{1}{2}$
		$\frac{2}{2}x = \frac{4}{2}$	
		$x = 2$	

Se comprueba la solución al sustituir en la ecuación el valor de x, y se verifica la igualdad.

$$2(2) + 3 = 7$$
$$4 + 3 = 7$$
$$7 = 7$$

Por tanto, la solución es $x = 2$

2 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación $m - 25 = 3m - 5$.

Solución

$m - 25 = 3m - 5$	$\rightarrow$	$m - 3m = -5 + 25$	Se suma 25 y se resta $3m$
		$-2m = 20$	Al simplificar
		$m = \frac{20}{-2}$	Se divide entre -2
		$m = -10$	

Por tanto, $m = -10$

3 ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2$?

Solución

$$20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2 \quad \rightarrow \quad 20x - 11x + 6x = 8 + 2 + 14$$
$$15x = 24$$
$$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

Teorema: sea la ecuación lineal $ax = b$

a) Si $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$ es solución única

Demostración:

$ax = b$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad 1x = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

Supongamos ahora que x_0 es solución, entonces, al sustituir en $ax = b$ obtenemos:

$$ax_0 = b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}(ax_0) = \frac{1}{a}(b) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)x_0 = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{b}{a}$$

Por tanto, $x = \frac{b}{a}$ es solución única.

b) Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, entonces, $ax = b$ no tiene solución

Demostración:
Sea $a = 0$, entonces, para todo $k \in R$, $ak = 0$ si $b \neq 0$, entonces, $ax \neq 0$, por tanto, k no es solución de $ax = b$

c) Si $a = 0$ y $b = 0$, todo $k \in R$ es solución de $ax = b$

Demostración:
Si $a = 0$, para todo $k \in R$, $ak = 0$, si $b = 0$, entonces, cualquier número real k es solución de $ax = b$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de la ecuación $2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x$.

Solución

Al resolver la ecuación se obtiene:

$$2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x \quad \rightarrow \quad 2x - 5x - 11x + 14x = -6 + 7$$
$$0x = 1$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero (ver inciso *b* del teorema).

2 Determina el conjunto solución de la ecuación $3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y$.

Solución

$$3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y \quad \rightarrow \quad 3y + 5y - 10y + 2y = -2 + 8 - 6$$
$$0y = 0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero (ver inciso *c* del teorema).

EJERCICIO 60

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2 = 5$
2. $y - 4 = 6$
3. $8 - z = 9$
4. $10 - x = 12$
5. $2x - 3 = 5$
6. $3y + 2 = 11$
7. $9x - 6 = 18$
8. $5x + 7 = 3$
9. $1 - 4w = 9$
10. $2 - 7z = 13$
11. $8x - 6 = 6x + 4$
12. $12 + 7x = 2x + 22$
13. $9 - 8y = 27 - 2y$
14. $2z + 9 = z + 1$
15. $3w - 3 = 4w + 11$
16. $10x + 21 = 15 - 2x$
17. $21x - 3 = 3x + 6$
18. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$

19. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
20. $-9x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
21. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$
22. $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - 2x$
23. $-12x - 8 - 3x + 10 = 2x - 9 + 6x$
24. $3z - 8 + 6z - 12 = z - 10 + 9z - 13$
25. $7y - 10 + 2y - 8 = 14y - 9 + 8y$
26. $x - 6 - 5x + 10x = 9x - 8 + 3x$
27. $2z - 4 - 8z + 9 = 10z - 6 + z - 12$
28. $9y - 1 - 14y + 8 = y - 9 + 15y - 1$
29. $x - 7 - 12x - 9 + 3x = 14x - 10 - x + 7$
30. $10z - 5 + 7z - 10 + 8z = 2z - 6 + 4z - 8$
31. $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$
32. $14 - 12x + 39x - 18x = 239 - 60x - 6x$
33. $-8x + 48 - 30x - 51x = 3x - 31x + 170$
34. $7x + 5 - 2x + 9x = 14x - 9 + 2x - 11x + 8$
35. $3w + 5 - 7w + 9w - 11w + 13 = 16 - 8w$
36. $6z + 12z - 18 - 5z = -12z + 4z - 11 + z$
37. $10x - 8 + 3x - 7 + x = 20x - 10 - 6x$
38. $5x - 8 - 8x + 10 - 3x = 9 - x + 6 - 5x - 13$
39. $2y + 7 - 8y + 5 - 3y = 14 - 6y - 2 - 3y$
40. $12z - 9 - 10z + 3 - 8z = z - 9 + 3z + 10 - 10z$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con signos de agrupación y productos indicados

Para resolver este tipo de ecuaciones se suprimen los signos de agrupación o se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación equivalente que se obtuvo.

EJEMPLOS

1. Resuelve la ecuación: $8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8)$.

Solución

Se eliminan los signos de agrupación y se resuelve la ecuación equivalente que se obtiene:

$$8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8) \quad \rightarrow \quad 8x - 6x + 9 + 3x - 2 = 4 - 7x + 8$$
$$8x - 6x + 3x + 7x = 4 + 8 - 9 + 2$$
$$12x = 5$$
$$x = \frac{5}{12}$$

Por tanto, la solución es: $x = \frac{5}{12}$

2. Encuentra el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$

Solución

Se resuelven los productos indicados y se determina el valor de x de resolver la ecuación equivalente:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$
$$126 - 7x - 18 + 30x = -7x - 9 - 6x - 15 - 12$$
$$-7x + 30x + 7x + 6x = -9 - 15 - 12 - 126 + 18$$
$$36x = -144$$
$$x = \frac{-144}{36} = -4$$

Por consiguiente, $x = -4$

3 Determina el valor de x en la siguiente ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$

Solución

Se suprimen los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-[3x-5+2x-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-3x+5-2x+10+18x\}$$
$$2x-3x+9x+1+8=12x-9+3x-5+2x-10-18x$$
$$2x-3x+9x-12x-3x-2x+18x=-9-5-10-1-8$$
$$9x=-33 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{33}{9}=-\frac{11}{3}$$

Por consiguiente, el valor de x es: $-\frac{11}{3}$

4 Determina el valor de y en la siguiente ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$

Solución

Se realizan los productos notables, los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$
$$-13y-(y^2-8y+16)+8(2y-3)=8-(y^2-25)-10(y+1)$$
$$-13y-y^2+8y-16+16y-24=8-y^2+25-10y-10$$
$$-13y-y^2+8y+16y+y^2+10y=8+25-10+16+24$$
$$21y=63$$
$$y=\frac{63}{21}=3$$

Por tanto, la solución es: $y=3$

EJERCICIO 61

Determina el valor de la incógnita de las siguientes ecuaciones:

1. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$
2. $15x-20=6x-(x+2)+(-x+3)$
3. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6)$
4. $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1)-3(2x+3)$
5. $7(3x+1)+8(2x-3)=4(3x-1)-7(x-4)$
6. $30w-(-w+6)+(-5w+4)=-(5w+6)+(-8+3w)$
7. $-\{3y+8-[-15+6y-(-3y+2)-(5y+4)]-29\}=-5$
8. $-2y-3-\{-4y+5+[-y+2-(3y-1)+2y-5]\}=-(y-4)$

9. $-2(y-1)+\{-4(y-1)-5[y-2(4-y)+3y]-(y+1)\}=2y-(-5-y)$

10. $w-2[w+5(1-2w)+4w]-(w+3)=-w+3(w+2)+7w$

11. $x-3[2x-(x+1)+5(1-x)]=x+(3x-7)-(x+3)$

12. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$

13. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$

14. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

15. $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$

16. $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)^2$

17. $2x(x-4)-(2x+3)(x-4)=4x(2x-3)-8(1-x)^2$

18. $(3x-2)^3-(3x-4)(6x-5)-45x^2=9x^2(3x-5)-10(x+3)-2(6x-1)(6x+1)$

19. $3x-\{10x-[(3-5x)^2-8]+(5x-3)(5x+4)\}=3(6x^2-4)-9\{3x+(2x-1)(x-3)\}$

20. $12-\{6x+[3x+(x-7)(x+7)]-(2x+3)^2\}=-2x^2+5[(x+1)^2-3(x+6)]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fraccionarias

Cuando aparecen fracciones en la ecuación, se eliminan los denominadores al multiplicar los dos términos de la igualdad por su mínimo común múltiplo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$.

Solución

Se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso 6:

$$\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x \quad\rightarrow\quad 6\left(\frac{x}{6}+5\right)=6\left(\frac{1}{3}-x\right) \quad\rightarrow\quad \frac{6x}{6}+30=\frac{6}{3}-6x$$

Se simplifica

$$x+30=2-6x$$
$$x+6x=2-30$$
$$7x=-28$$
$$x=-\frac{28}{7}$$

Por consiguiente, el resultado es: $x=-4$

2 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{3z}\left(2-\frac{z}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4z}\left(10-\frac{5z}{3}\right)=\frac{1}{z}\left(5+\frac{z}{4}\right)$$

Solución

Se eliminan los signos de agrupación,

$$\frac{2}{3z}-\frac{z}{6z}-\frac{2}{3}+\frac{10}{4z}-\frac{5z}{12z}=\frac{5}{z}+\frac{z}{4z} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se multiplican ambos miembros por 12z, y se resuelve la ecuación que resulta.

$$12z\left(\frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}\right)$$
$$8-2z-8z+30-5z=60+3z$$
$$-2z-8z-5z-3z=60-8-30$$
$$-18z=22$$
$$z=\frac{22}{-18}$$
$$z=-\frac{11}{9}$$

Finalmente: $z=-\frac{11}{9}$

3 Determina el valor de y en la ecuación:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{1-9y^2}$$

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}$$

Se multiplica por el mínimo común múltiplo que es: $(1+3y)(1-3y)$ y se simplifica:

$$(1+3y)(1-3y)\left[\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}\right]$$
$$(1-3y)(1+2y)-(1+3y)(1-2y)=-(3y-14)$$

Se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$1+2y-3y-6y^2-\left(1-2y+3y-6y^2\right)=-3y+14$$
$$1+2y-3y-6y^2-1+2y-3y+6y^2=-3y+14$$
$$-2y=-3y+14$$
$$-2y+3y=14$$
$$y=14$$

4 Encuentra el valor de t en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{t^2+5t+6}-\frac{5}{t^2+3t+2}=\frac{3}{t^2+4t+3}$$

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}$$

Se multiplica por $(t+1)(t+2)(t+3)$, se simplifica y resuelve la ecuación:

$$(t+1)(t+2)(t+3)\left[\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}\right]$$
$$1(t+1)-5(t+3)=3(t+2)$$
$$t+1-5t-15=3t+6$$
$$t-5t-3t=6+15-1$$
$$-7t=20$$
$$t=-\frac{20}{7}$$

EJERCICIO 62

Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x=33$
2. $\frac{5}{2}x-\frac{5}{6}x=\frac{4}{3}$
3. $\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}x=-\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$
5. $\frac{4}{3}x-\frac{2}{5}=\frac{7}{5}x-\frac{1}{10}$
6. $\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}=x+\frac{1}{4}$
7. $\frac{5x}{6}-\frac{7}{4}+\frac{2x}{3}=2x-\frac{5}{12}+\frac{x}{3}$
8. $\frac{5x-9}{3}+\frac{x}{2}=10$
9. $\frac{x+10}{9}+\frac{x+7}{3}=7$
10. $\frac{x+1}{6}+\frac{x-3}{3}=\frac{5}{6}$
11. $\frac{9x+12}{4}+\frac{3x-2}{2}=\frac{7}{2}x$
12. $\frac{2x+1}{6}-\frac{x-3}{3}=\frac{4x-1}{3}+\frac{x-6}{2}$
13. $\frac{3x-2}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{6x-3}{2}-4$
14. $\frac{5}{6}(x+9)+\frac{3}{4}(x+1)-\frac{7}{9}=8$
15. $\frac{1}{2}(z-1)-(z-3)=\frac{1}{3}[z+3]+\frac{1}{2}$
16. $\frac{4}{3x}+\frac{7}{4}=6-\frac{5}{2x}$
17. $\frac{1}{4}+\left(2z-\frac{3z-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z+2}{6}\right)-2z$
18. $\frac{3}{4}\left(3-\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{3}\right)=1-\left(x-\frac{3}{2}\right)$
19. $\frac{2}{x}-\frac{4}{5}=\frac{3}{x}$
20. $\frac{3}{2x}-\frac{7}{5}=\frac{4}{5x}-\frac{5}{2}$
21. $\frac{3}{5x}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2x}=\frac{7}{5}-\frac{9}{4x}$
22. $\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{5x}=\frac{4}{5x^2}-\frac{7}{4x}$
23. $\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{5}{3x^2}-\frac{6}{x}$
24. $\frac{7y-1}{3}-\frac{5-2y}{2y}-\frac{4y-3}{4}=\frac{1+4y^2}{3y}$
25. $\frac{2x+7}{3}-\frac{2(x^2-4)}{5x}=\frac{4x^2-6}{15x}+\frac{7x^2+6}{3x^2}$
26. $\frac{3}{x-5}=\frac{4}{x+5}$
27. $\frac{4}{3x-2}=\frac{6}{2x+1}$
28. $\frac{5}{z-4}-\frac{2}{z+4}=0$
29. $\frac{3}{4x^2-1}-\frac{4}{2x+1}=\frac{5}{2x-1}$
30. $\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$
31. $\frac{2}{z^2-4z-12}-\frac{1}{z^2-3z-18}=\frac{4}{z^2+5z+6}$
32. $\frac{2}{2y^2+7y+3}-\frac{1}{2y^2+11y+5}=\frac{1}{y^2+8y+15}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con valor absoluto

En estas ecuaciones se aplica la definición del valor absoluto.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ a & \text{si} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se tiene que si $|x| = a$, su solución está dada por:

$$x = a \qquad \text{o} \qquad -x = a$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $|6 - 3x| = 9$.

Solución

Se aplica la definición y se obtienen dos ecuaciones, las cuales se resuelven por separado:

$$\begin{aligned} 6 - 3x &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(6 - 3x) &= 9 \\ -6 + 3x &= 9 \\ 3x &= 9 + 6 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las soluciones para esta ecuación son: $x = -1$ o $x = 5$

2 Encuentra el conjunto solución de: $|3x - 1| = 2x + 5$.

Solución

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 + 1 \\ x &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(3x - 1) &= 2x + 5 \\ -3x + 1 &= 2x + 5 \\ -3x - 2x &= 5 - 1 \\ -5x &= 4 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-\frac{4}{5}, 6\right\}$

3 Determina el conjunto solución de: $\left|\frac{x+3}{x}\right| = 2$.

Solución

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= 2 \\ x + 3 &= 2x \\ x - 2x &= -3 \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad -\left(\frac{x+3}{x}\right) = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= -2 \\ x + 3 &= -2x \\ x + 2x &= -3 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\{-1, 3\}$

4 Determina el conjunto solución de $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right|=2$.

Solución

Se factorizan las expresiones, se simplifica y se aplica la definición:

$$\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right|=2 \quad\rightarrow\quad \left|\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\right|=2 \quad\rightarrow\quad \left|\frac{x-2}{x+3}\right|=2$$

$$\frac{x-2}{x+3}=2 \qquad\qquad -\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=2 \rightarrow \frac{x-2}{x+3}=-2$$

$$x-2=2(x+3) \qquad\qquad x-2=-2(x+3)$$

$$x-2=2x+6 \qquad\qquad x-2=-2x-6$$

$$x-2x=6+2 \qquad\qquad x+2x=-6+2$$

$$-x=8 \qquad\qquad 3x=-4$$

$$x=-8 \qquad\qquad x=-\frac{4}{3}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-8,-\frac{4}{3}\right\}$

EJERCICIO 63

Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

1. $|x+1|=8$
2. $|3-2y|=5$
3. $|3m+4|=8$
4. $|5x-1|=14$
5. $|4-2y|=4$
6. $|-2m-5|=1$
7. $\left|x+\frac{1}{2}\right|=2$
8. $\left|\frac{m-1}{2m+1}\right|=0$
9. $|8x+2|=2-x$
10. $|2x-5|=x+2$
11. $\left|\frac{x+2}{5}\right|=\frac{1}{15}$
12. $\left|\frac{x}{3}-1\right|=\frac{x}{6}+2$
13. $\left|\frac{3x-2}{5}\right|=\frac{1}{2}-\frac{x}{10}$
14. $\left|\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$
15. $\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\right|=2$
16. $\left|\frac{x}{x-3}\right|=1$
17. $\left|\frac{x+6}{x-2}\right|=5$
18. $\left|\frac{3x-1}{x}\right|=1$
19. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\right|=4$
20. $\left|\frac{3x}{x^2-7x}\right|=8$
21. $\left|\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\right|=6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con literales

En estas ecuaciones las incógnitas se representan con las letras x, y, z, mientras que las letras a, b, c, d, m y n, se utilizan como constantes.

EJEMPLOS

1 Encuentra el valor de x en la ecuación: $8abcx - ab = 8abx + 1$.

Solución

$$8abcx - ab = 8abx + 1$$

$$8abcx - 8abx = 1 + ab \quad \text{Se agrupan términos en } x$$

$$x(8abc - 8ab) = 1 + ab \quad \text{Se factoriza y se despeja}$$

$$x = \frac{1+ab}{8abc-8ab}$$

2 Determina el valor de y en la ecuación: $a-\frac{m+n}{y}=b-\frac{m-n}{y}$.

Solución

$$a-\frac{m+n}{y}=b-\frac{m-n}{y}$$

$$y\left[a-\frac{m+n}{y}=b-\frac{m-n}{y}\right] \quad \text{Se eliminan los denominadores}$$

$$ay-(m+n)=by-(m-n)$$

$$ay-m-n=by-m+n$$

$$ay-by=-m+n+m+n \quad \text{Se agrupan términos}$$

$$y(a-b)=2n \quad \text{Se factoriza}$$

$$y=\frac{2n}{a-b}$$

3 Resuelve la ecuación $1+\frac{b}{z}=\frac{b}{a}+\frac{a}{z}$; para z.

Solución

Se multiplica la ecuación por az, para eliminar los denominadores:

$$az\left[1+\frac{b}{z}=\frac{b}{a}+\frac{a}{z}\right]$$

$$az+ab=bz+a^2$$

$$az-bz=a^2-ab \quad \text{Se agrupan los términos con } z$$

$$z(a-b)=a(a-b) \quad \text{Se factoriza en ambos miembros y se despeja } z$$

$$z=\frac{a(a-b)}{(a-b)} \quad \text{Se simplifica}$$

$$z=a$$

EJERCICIO 64

Resuelve las siguientes ecuaciones para las incógnitas *x*, *y* o *z*, según sea el caso:

1. $2b(2a - x) = x(b - a) + a(x + b)$
2. $y^2 + a^2 = (a + y)^2 - a(a + 1)$
3. $a(x + b) - (x + a)^2 = -x^2$
4. $a(b - y) - a(b - 1) = a(ay - b)$
5. $\frac{x-m}{x-n} = \left(\frac{2x-m}{2x-n}\right)^2$
6. $\frac{x-m}{n} = 2 - \frac{x-n}{m}$
7. $\frac{x+a}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{x+b}{b} - 2$
8. $(y-m)^2 + (m-n)^2 - (y-n)^2 = 0$
9. $(z+m)^3 + (z-m)^3 = 2(z^3 + 6m^3)$
10. $\frac{z+a}{a-b} + \frac{z-a}{a+b} = \frac{z+b}{a+b} - \frac{z-b}{a-b}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para resolver los siguientes problemas debes tomar en cuenta la relación entre objetos, personas, etc., para establecer una incógnita y un modelo matemático en lenguaje algebraico que al resolverlo dé el valor de dicha incógnita y, por tanto, la solución del problema.

Problemas sobre números

1 La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en ocho. Encuentra los números.

Solución

Datos: número mayor: $x + 8$

Número menor: x

Planteamiento:

$$x + (x + 8) = 106 \qquad \text{la suma de dos números es 106}$$
$$2x + 8 = 106$$
$$2x = 106 - 8$$
$$2x = 98$$
$$x = \frac{98}{2}$$
$$x = 49$$

Por consiguiente, el número mayor es 49 + 8 = 57 y el menor es 49

2 La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.

Solución

Datos:

Mayor: x Medio: $x - 32$ Menor: $x - 65$

Planteamiento:

$$x + (x - 32) + (x - 65) = 200 \qquad \text{la suma de los tres números es 200}$$
$$3x = 200 + 32 + 65$$
$$3x = 297$$
$$x = \frac{297}{3}$$
$$x = 99$$

Por tanto, los números buscados son: Mayor = 99 Medio = 67 Menor = 34

Para los siguientes problemas se utiliza la notación desarrollada de un número. Por ejemplo, en el número $372 = 3(100) + 7(10) + 2$, 3 es el dígito de las centenas, 7 el de las decenas y 2 el de las unidades.

3 En un número de dos dígitos, el dígito de las decenas es 3 unidades menor que el de las unidades. Si el número excede en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos, halla el número.

Solución

Datos:

Dígito de las unidades: x
Dígito de las decenas: $x - 3$
Número: $10(x - 3) + x$

Planteamiento:

Número = 4(suma de los dígitos) + 6

$$10(x - 3) + x = 4(x + x - 3) + 6$$

Se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} 10x - 30 + x &= 4x + 4x - 12 + 6 \\ 10x + x - 4x - 4x &= -12 + 6 + 30 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

El dígito de las unidades es 8 y el de las decenas es 5, por tanto, el número es 58.

4 La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 9. Si el número se divide por el dígito de las decenas, el cociente es 12. Encuentra el número.

Solución

Datos:

Dígito de las unidades: x

Dígito de las decenas: $9 - x$

Número: $10(9 - x) + x$

Planteamiento:

$$\frac{\text{Número}}{\text{Dígito de las decenas}} = 12$$

$$\frac{10(9 - x) + x}{9 - x} = 12$$

Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 10(9 - x) + x &= 12(9 - x) \\ 90 - 10x + x &= 108 - 12x \\ -10x + x + 12x &= 108 - 90 \\ 3x &= 18 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

El dígito de las unidades es 6 y el de las decenas es 3, por tanto, el número es 36

EJERCICIO **65**

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.
2. La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.
3. La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.
4. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.
5. La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.
6. La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?
7. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.

8. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.
9. El exceso de un número sobre 20 es igual a las tres cuartas partes del mismo número. ¿Cuál es el número?
10. El exceso de 30 sobre un número es igual a las dos terceras partes del número, más 10 unidades. ¿Cuál es el número?
11. La suma de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 40. ¿Cuáles son los números?
12. La suma de dos números y la diferencia de sus cuadrados es 11. ¿Cuáles son los números?
13. El cuadrado del exceso de 12 sobre un número, menos la mitad del número, es igual al cuadrado del número, menos los trece medios del número. ¿Cuál es el número?
14. Un número es el doble de otro, si ambos se aumentan en 6, el triple del mayor equivale a cinco veces el menor. Encuentra los números.
15. Un número es la tercera parte de otro, si ambos se aumentan en 10, el mayor será el doble del menor. Determina los números.
16. La suma de tres números es 45, el mayor excede en 5 al mediano y en 10 al menor. Encuentra los números.
17. La suma de dos números es 60 y el mayor equivale cinco veces el menor aumentado en 30. Determina los números.
18. La suma de dos números es 23 y el doble del mayor excede en 6 al triple del menor. ¿Cuáles son los números?
19. La diferencia de dos números es 8 y si se divide el doble del mayor más dos entre el menor, se obtiene como cociente 5. Encuentra los números.
20. Dos números están en la relación 3:4 y el mayor equivale al menor aumentado en 8. Determina los números.
21. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es igual a 8. Si los dígitos se invierten, el número resultante excede en 11 a las seis quintas partes del número original. ¿Cuál es el número?
22. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades. Si al número se resta 4, el resultado es el séxtuplo de la suma de sus dígitos. Determina el número.
23. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es 4 menos que el dígito de las unidades. Si los dígitos se invierten, el número resultante es el triple más 6 del número original. Encuentra el número.
24. La suma de los dígitos de una cantidad de dos cifras es 9. Si los dígitos se invierten, el número que resulta excede en 9 al número original, ¿cuál es el número?
25. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede al de las unidades en 5 y las dos terceras partes de la suma de sus cifras es 6. ¿Cuál es el número?
26. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 5 al triple de la suma de sus dígitos, ¿cuál es el número?
27. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se resta 18 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original, el resultado es la mitad del número original, determina el número.
28. En una cantidad de dos dígitos, el número que ocupa el lugar de las decenas es la mitad del dígito que ocupa el lugar de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas, más cuatro veces el de las unidades reducido en dos. ¿Cuál es la cantidad?
29. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 16 y el cociente del número original con el número que resulta al invertir los dígitos es uno, con un residuo de 18. ¿Cuál es el número?
30. En un número de dos cifras, el dígito de las unidades equivale a las $\frac{2}{3}$ partes del dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo 6, halla los números.
31. En un número de tres cifras, el dígito de las unidades excede en tres al de las centenas y la suma de los tres dígitos es 7. Si se invierten los dígitos de las decenas y las centenas el número resultante excede en 90 al original. Encuentra el número.
32. En un número de tres cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades y en 4 al de las centenas. Si se invierten el dígito de las unidades y el de las centenas, el número que resulta es 66 unidades menor que el doble del número original. ¿Cuál es el número?

33. En un número de tres cifras el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las unidades, mientras que el de las centenas es el sucesor del dígito de las decenas. Si se intercambia el dígito de las decenas por el de las centenas el número obtenido es 44 unidades menor que treinta veces la suma de los dígitos. Determina el número.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre edades

1 La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

Solución

Datos:

Edad de Carla: x
Edad de Daniel: $x - 3$

Planteamiento:

2(Edad de Carla) + 12 años = 3(Edad de Daniel)

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 12 = 3(x - 3) \quad \rightarrow \quad 2x + 12 = 3x - 9$$
$$2x - 3x = -9 - 12$$
$$-x = -21$$
$$x = 21$$

Por tanto, Carla tiene 21 años y Daniel 18.

2 La edad de Antonio es el doble de la edad de Ramiro y dentro de 6 años será de $\frac{5}{3}$. ¿Cuáles son sus edades?

Solución

Datos:	Edades actuales:	Dentro de 6 años:
Antonio	$2x$	$2x + 6$
Ramiro	x	$x + 6$

Planteamiento:

$$2x + 6 = \frac{5}{3}(x + 6)$$

Resolvemos la ecuación:

$$3(2x + 6) = 5(x + 6)$$
$$6x + 18 = 5x + 30$$
$$6x - 5x = 30 - 18$$
$$x = 12$$

Finalmente, la edad de Ramiro es 12 años y la de Antonio es 24

EJERCICIO 66

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de las edades de Andrés, Carlos y Rodolfo es de 90 años. La edad de Andrés excede en 4 años a la edad de Carlos y en 11 a la de Rodolfo. Determina las edades de los tres.
2. La edad de Fabiana es la tercera parte de la edad de Hilda y la edad de Cecilia es el doble de la edad de Fabiana. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Cecilia.
3. La edad de Tania excede en 6 a la de Luz, y la edad de María es la semisuma de las edades de Tania y Luz. Si la suma de sus edades es 42, determina las edades de Tania, Luz y María.
4. Carlos tiene 18 años y Juan 42, ¿en cuántos años la edad de Juan será el doble de la de Carlos en ese entonces?

5. La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.
6. La edad actual de Bárbara es la mitad de la de Patricia. Si dentro de veinte años la edad de Patricia superará en 8 la de Bárbara, determina las edades actuales.
7. Ignacio tiene 70 años y Álvaro 28. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Ignacio era el triple de la de Álvaro?
8. Hace 6 años la edad de Alejandra era el triple de la de Omar y dentro de 4 años será el doble. Determina sus edades actuales.
9. Gabriela le dice a Samanta: “Si a mi edad le restas 4 años y a la de Angélica 12 nuestras edades serían iguales, ¿cuántos años tengo si mi edad es la mitad de la de Angélica?”
10. Héctor le dice a María: “Mi abuelo es 40 años más grande que yo y un cuarto de la suma de nuestras edades equivale a mi edad. ¿Cuántos años tengo?”
11. La edad de Guillermo excede en 12 a la de Patricia y hace 7 años la edad de Patricia era $\frac{3}{4}$ de la edad de Guillermo. Halla las edades de Guillermo y Patricia hace 7 años.
12. La edad de Camilo supera en 20 años a la de Joaquín y equivale a $\frac{3}{2}$ de la edad de Julián. Si la suma de las edades de Camilo, Joaquín y Julián es de 60 años, ¿cuáles son sus edades?
13. La edad de Iván es $\frac{3}{5}$ de la de Antonio y hace 5 años era la mitad, determina ambas edades.
14. La edad de Luciana son los tres quintos de la edad de Mariana, si dentro de 10 años Luciana tendrá siete décimos de la edad que tenga Mariana en ese entonces, ¿cuántos años tiene Luciana?
15. Hace 5 años la edad de Juan Carlos era dos tercios de la de Daniel y dentro de 5 años será cuatro quintos. Halla las edades actuales.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre mezclas

1 Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener agua al 2% de sal?

Solución

Datos:

Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de sal de cada recipiente:

$$5\% \text{ de } 80 = 2\% \text{ de } (80 + x)$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{5}{100}(80) = \frac{2}{100}(80 + x) \quad \rightarrow \quad 5(80) = 2(80 + x)$$

$$400 = 160 + 2x$$
$$400 - 160 = 2x$$
$$240 = 2x$$
$$120 = x$$

Esto significa que se deberán agregar 120 litros de agua para obtener agua al 2% de sal.

2 ¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?

Solución

Datos:

Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de alcohol de cada recipiente:

$$15\% \text{ de } x + 6\% \text{ de } (180 - x) = 10\% \text{ de } 180$$

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$\frac{15}{100}x + \frac{6}{100}(180 - x) = \frac{10}{100}(180) \quad \rightarrow \quad 15x + 6(180 - x) = 10(180)$$

$$15x + 1\,080 - 6x = 1\,800$$

$$9x = 720$$

$$x = 80$$

Se deben combinar 80 litros al 15% de alcohol con 100 litros al 6% para obtener 180 litros al 10% de alcohol.

EJERCICIO 67

Resuelve los siguientes problemas:

1. A 120 litros de agua azucarada al 3%, ¿cuánta agua se debe evaporar para aumentar su concentración a 5%?
2. A 80 litros de agua al 1.5% de sal, ¿cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
3. ¿Cuánto ácido clorhídrico se debe agregar a 120 gr de una solución al 60% del ácido para obtener una nueva solución con 70%?
4. Si se tienen 120 litros de una solución que contiene azúcar al 5%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para obtener una solución al 2%?
5. De 50 litros de agua al 4% de sal, ¿qué cantidad de agua se debe evaporar para obtener una nueva solución al 5%?
6. Un radiador contiene 1.5 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 30% de la mezcla es anticongelante, ¿cuántos litros de anticongelante puro se deben añadir para que en la nueva mezcla represente 50%?
7. Se tienen 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de fórmula al 20%. Si se desea una mezcla al 15% de leche de fórmula, ¿cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
8. En una empresa que fabrica material médico se utiliza alcohol etílico al 10% para limpiar las áreas de producción. Si al almacén llega un contenedor de 20 lt con alcohol etílico al 15%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para poder obtener el alcohol al 10%?
9. Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?
10. Se requieren 100 ml de una solución al 3.5% de alcohol, si sólo se tienen disponibles soluciones al 5 y 2%, ¿qué cantidad de cada solución deberá mezclarse para obtener la solución requerida?
11. ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 30% deben combinarse con otra al 3% para obtener 30 litros de una nueva solución al 12%?

12. Mario quiere mezclar una aleación de plata al 30%, con otra al 80% para lograr una nueva aleación al 60%. Si hay 30 onzas más de la aleación al 80% que de la de 30%, ¿cuántas onzas hay de cada aleación?
13. Una planta procesadora de alimentos dispone de dos tipos de mermelada, una con 56% y otra con 80% de azúcar. Si desea producir 2 400 litros de mermelada al 70% de azúcar, ¿cuánta de cada tipo deberá utilizar?
14. Se mezclan 12 000 gramos de una aleación de cobre con 8 000 gramos de otra que contiene 30% menos que la primera, y se obtiene una aleación con 80% de cobre, ¿qué porcentaje de cobre hay en cada aleación?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre monedas

En este tipo de problemas se toma en cuenta que el producto del número de billetes, monedas, etc…, por su denominación nos da el valor monetario.

1 Carmen tiene \$110 en monedas de \$10 y \$5, el número de monedas de \$10 excede en 2 a las de \$5, ¿cuántas monedas de \$10 y de \$5 tiene Carmen?

Solución

Datos:
Número de monedas de \$10: x
Número de monedas de \$5: $x - 2$
Planteamiento:
La suma de los productos del número de monedas por la denominación de la moneda nos da el total:

(denominación) (monedas de \$10) + (denominación) (monedas de \$5) = total

$$10x + 5(x - 2) = 110$$

Resolución:

$$10x + 5(x - 2) = 110 \quad \rightarrow \quad 10x + 5x - 10 = 110$$
$$10x + 5x = 110 + 10$$
$$15x = 120$$
$$x = 8$$

Carmen tiene 8 monedas de \$10 y 6 monedas de \$5.

2 Carla retira del banco \$5 000, en billetes de \$500, \$200 y \$100. Si el número de billetes de \$200 excede en 3 a los de \$100, y el número de billetes de \$100 es el doble de los de \$500, ¿cuántos billetes de cada denominación recibió Carla?

Solución

Datos:
Billetes de \$200: x
Billetes de \$100: $x - 3$
Billetes de \$500: $\frac{x-3}{2}$

Planteamiento:

$$200x + 100(x - 3) + 500\left(\frac{x-3}{2}\right) = 5\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$200x + 100(x - 3) + 250(x - 3) = 5\,000$$
$$200x + 100x - 300 + 250x - 750 = 5\,000$$
$$200x + 100x + 250x = 5\,000 + 300 + 750$$
$$550x = 6\,050$$
$$x = 11$$

Carla recibió 11 billetes de \$200, 8 de \$100 y 4 de \$500.

EJERCICIO 68

Resuelve los siguientes problemas:

1. Marcos ahorró \$3 270 en monedas de \$10, \$5 y \$2. Si el número de monedas de \$10 excede en 20 a las de \$5 y en 15 a las de \$2, ¿cuántas monedas de \$5 pesos tiene Marcos?
2. Paulina tiene \$9 300 en billetes de \$1 000, \$500 y \$200. Si el número de billetes de \$500 excede en 2 a los de \$1 000 y en 3 a los de \$200, ¿cuántos billetes de cada denominación tiene Paulina?
3. Andrés tiene 30 monedas de \$5 y \$10. Si en total dispone de \$200, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
4. Juan tiene 400 monedas de 50¢ y \$1. Si en total dispone de \$350, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
5. Se desea repartir \$210 en monedas de \$20, \$10 y \$5, de tal forma que el número de monedas de cada denominación sea el mismo. ¿Cuántas monedas se necesitan de cada denominación?
6. Se desea tener \$2 600 en billetes de \$200, \$100 y \$50, de tal manera que el número de billetes de mayor denominación sea uno más que los de mediana denominación y dos más que los de menor denominación, ¿cuántos billetes de cada denominación se tendrá?
7. Gloria tiene el triple de monedas de \$5 que de \$10 y 10 monedas más de \$2 que de \$5. Si en total dispone de \$392, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
8. Iván da a su hijo \$90 en monedas de \$2 y 50¢, si el número de monedas de \$2 es la mitad del número de monedas de 50¢, ¿cuántas monedas de \$2 pesos le da a su hijo?
9. Fabián tiene 12 monedas de \$5 y 33 de \$2, al llegar el día domingo su papá le da el doble número de monedas de \$2 que de \$5, Fabián se da cuenta que tiene la misma cantidad de dinero en monedas de \$2 que de \$5, ¿cuántas monedas de \$2 y de \$5 le dio su papá?
10. Sergio es conductor de un transporte colectivo y cambia en el banco \$795 por monedas de \$5, \$2, \$1 y de 50¢. Al separar las monedas de acuerdo con su denominación se da cuenta que el número de monedas de \$5 es la tercera parte del número de monedas de \$2, la mitad de las de \$1 y el doble de 50¢, ¿cuántas monedas de \$5 tiene?
11. Ricardo cambia un cheque de \$6 400 por billetes de \$200, \$100, \$50 y \$20, y le pide al cajero que el número de billetes de \$200 sea la mitad de los de \$100, la cuarta parte de los de \$50 y la décima parte de los de \$20, ¿cuántos billetes de \$200 recibirá?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre costos

1 Sandra pagó \$66 por una pasta dental, un jabón y un champú. Si el costo de la pasta excede en \$15 al del jabón y en \$3 al del champú, determina el costo de cada uno de los artículos.

Solución

Datos:
Costo de la pasta para dientes: x
Costo del jabón: $x - 15$
Costo del champú: $x - 3$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$x + (x - 15) + (x - 3) = 66 \quad \rightarrow \quad 3x - 18 = 66$$
$$3x = 66 + 18$$
$$3x = 84$$
$$x = \frac{84}{3}$$
$$x = 28$$

Por tanto, los costos de los artículos son: pasta dental \$28, jabón \$13, champú \$25.

2 Cierta escuela pidió el presupuesto para la fotografía de graduación de un grupo de 30 alumnos. Al momento de realizar el trato con el estudio fotográfico se avisa que serán 10 alumnos más, si el estudio respeta el precio total y disminuye en \$50 el costo de la fotografía por persona, ¿cuál hubiese sido el costo x de la fotografía por alumno para el grupo de 30 alumnos?

Solución

Datos:
El costo total para un grupo de 30 alumnos es: $30x$
El costo total para un grupo de 40 alumnos es: $40(x - 50)$
Debido a que el costo total es el mismo, entonces:

$$30x = 40(x - 50)$$

Se resuelve la ecuación:

$$30x = 40x - 2\,000 \quad \rightarrow \quad 30x - 40x = -2\,000$$
$$-10x = -2\,000$$
$$x = \frac{-2000}{-10}$$
$$x = 200$$

Por tanto, el costo de la fotografía para un grupo de 30 alumnos es de \$200 por cada uno.

3 El costo de producción por ejemplar de una revista semanal es de 28 centavos. El ingreso del distribuidor es de 24 centavos por copia más 20% de los ingresos por concepto de publicidad anunciada en la revista cuando sobrepasan las 3 000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para obtener utilidades semanales de \$1 000?

Solución

Sea x el número de ejemplares, el 20% de los ingresos es $\frac{20}{100}\left(\frac{24}{100}x\right) = \frac{6}{125}x$ cuando sobrepasan las 3 000 copias

Costo total por semana = \$ $\frac{28}{100}(x + 3000)$

Ingreso total por semana = \$ $\left[\frac{24}{100}(x + 3000) + \frac{6}{125}x\right]$

Se sabe que:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

Por tanto,

$$\left[\frac{24}{100}(x + 3000) + \frac{6}{125}x\right] - \frac{28}{100}(x + 3000) = 1\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$500\left\{\left[\frac{24}{100}(x + 3\,000) + \frac{6}{125}x\right] - \frac{28}{100}(x + 3\,000) = 1\,000\right\}$$
$$500\left\{-\frac{4}{100}(x + 3\,000) + \frac{6}{125}x = 1\,000\right\}$$
$$-20(x + 3\,000) + 24x = 500\,000$$
$$-20x - 60\,000 + 24x = 500\,000$$
$$4x = 500\,000 + 60\,000$$
$$x = \frac{560\,000}{4}$$
$$x = 140\,000$$

El distribuidor deberá vender 140 000 ejemplares para obtener utilidades de \$1 000 semanales.

EJERCICIO 69

Resuelve los siguientes problemas:

1. Julio pagó por un traje, una camisa y unos zapatos, $2 700. Si la camisa cuesta la sexta parte del traje y los zapatos cuestan el doble de la camisa, ¿cuál es el precio de los zapatos?
2. Alejandra compró una chamarra, una blusa y un pantalón. El pantalón costó la mitad de la chamarra y la blusa las tres décimas partes del costo del pantalón. Si en total pagó $1 320, ¿cuál fue el costo de cada prenda?
3. Adriana pagó por su reinscripción, colegiatura y un examen extraordinario, $6 400. Si el examen cuesta las dos quintas partes de la inscripción y las dos novenas partes de la colegiatura, ¿cuánto paga de colegiatura?
4. Una empresa compró automóviles para tres de sus gerentes. El primer automóvil costó el doble del segundo más $25 000 y el tercero $18 000 menos que el primero. Si la empresa invirtió $432 000, ¿cuál es el precio de cada automóvil?
5. Jazmín ganó el martes el doble de lo que ganó el lunes; el miércoles, el doble de lo que ganó el martes; el jueves, el doble de lo que ganó el miércoles; el viernes, $30 menos que el jueves y el sábado $10 más que el viernes. Si en los seis días Jazmín ganó $1 500, ¿cuánto ganó el miércoles?
6. Una computadora y un escritorio costaron $15 100, si por el escritorio se pagó la sexta parte de la computadora más $400, determina el precio de cada uno.
7. En el curso de álgebra un profesor pidió resolver 16 problemas al alumno más destacado de la clase, con la condición de que por cada problema resuelto correctamente el estudiante recibiría $30, y por cada problema erróneo, perdería $10. Después de resolver los 16 problemas, el profesor le pagó $240. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente el alumno?
8. Luis dice: “Si triplico mi dinero y pago $2 600 de una deuda me quedarían $13 000”. ¿Cuánto dinero tiene Luis?
9. “Compré 20 discos por cierta cantidad, si hubiera adquirido 4 discos más por la misma cantidad, el costo de cada disco disminuiría en $60. ¿Cuál es el precio de cada disco?” (Sugerencia: sea x el precio de los 20 discos).
10. El salario básico de un profesor es de $40 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora cuando rebasa las 40 horas por semana. Si el cheque que recibe es de $2 800, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó durante la semana?
11. El precio de 30 kg de una mezcla de dos tipos de arroz es de $10.20 por kilogramo. Si uno de los tipos de arroz vale $9.30 el kilogramo y el otro $12, ¿cuántos kilogramos de cada tipo de este grano hay en la mezcla?
12. Las entradas para el espectáculo de un circo cuestan $60 para adulto y $40 para niño. Si una familia pagó $320 por seis boletos, ¿cuántos boletos de cada clase compró?
13. En un partido de futbol se vendieron 12 000 boletos y se recaudaron $800 000. Si los precios eran de $60 y $80, ¿cuántos boletos se vendieron de cada clase?
14. Juan mezcla tres tipos de café, el primero tiene un precio de $100 el kilogramo, el segundo de $70 y el tercero de $105. La mezcla pesa 20 kilogramos y la vende en $90 el kilogramo. Si la cantidad del grano de $70 es el doble que la del café de $100, ¿cuántos kilogramos utilizó de cada grano?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre el tiempo requerido para realizar un trabajo

1 Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?

Solución

Datos:	Tiempo total de llenado:	En una hora, el estanque estará lleno en:
Primera llave	4 horas	$\frac{1}{4}$ de su capacidad
Segunda llave	6 horas	$\frac{1}{6}$ de su capacidad
Las dos llaves	x horas	$\frac{1}{x}$ de su capacidad

Planteamiento:

En una hora las dos llaves llenarán $\frac{1}{x}$ de la capacidad del estanque:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad 12x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}\right) \quad \rightarrow \quad 3x+2x=12$$

$$5x=12$$

$$x=2.4$$

2.4 horas equivalen a 2 horas, .4(60) = 24 minutos

Por consiguiente, las dos llaves tardarán 2 horas y 24 minutos en llenar el estanque.

2 Para la recolección de trigo se utilizan dos cosechadoras, la primera tarda 8 horas y las dos juntas tardan 4.8 horas, ¿cuánto tiempo tardará la segunda en recolectar el trigo?

Solución

Sea x el tiempo que tarda la segunda cosechadora en recolectar el trigo, entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4.8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{4.8}-\frac{1}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{24}-\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad 24=5x-3x \quad \rightarrow \quad 24=2x$$

$$x=12$$

Resulta que la segunda cosechadora tardará 12 horas en recolectar el trigo.

EJERCICIO 70

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un estanque se llena con una de dos llaves en 3 horas y con la segunda en 2 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren las dos llaves?
2. Cierto trabajo lo puede realizar Damián en 4 horas y Beatriz en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo realizan ambos?
3. Una tortillería produce por día 350 kilogramos con la máquina A, con la máquina B la misma producción se obtiene en dos días, si se ponen a trabajar ambas máquinas, ¿cuánto tiempo tardarán en producir los 350 kilos de tortilla?
4. Para envasar leche se utilizan dos máquinas, la primera envasa 2 400 botes en 4 horas y la segunda envasa la misma cantidad en 8 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar los 2 400 botes de leche ambas máquinas?
5. Para sacar 20 000 copias se tienen tres copiadoras, la primera tarda 6 horas, la segunda 8 horas y la tercera 4 horas; si se utilizan las tres copiadoras, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar esta tarea?

6. Un productor de leche puede vaciar un contenedor con una llave de desagüe en 12 horas; este recipiente puede ser llenado con una llave en 4 horas y con una segunda llave en 6 horas. Si el contenedor inicialmente está vacío y se abren las tres llaves simultáneamente, ¿en cuánto tiempo se puede llenar?
7. Cierta producción de tornillos se realiza por la máquina serie A en una hora 20 minutos, y por las máquinas series A y B en 1 hora, ¿cuánto tiempo tardaría la máquina serie B en realizar la producción de tornillos?
8. Una pipa de 1 500 litros de capacidad tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave la llena en 45 minutos, la segunda en 30 y el desagüe la vacía en 60 minutos. Si la pipa está vacía y se abren las dos llaves y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse la pipa?
9. Tania y José van a construir cierta cantidad de juguetes que se conforman de tres piezas cada uno. Tania los construye en 2 horas y media y ambos tardan una hora 54 minutos, ¿cuánto tardará José en construir los juguetes?
10. En una escuela se tienen que hacer juegos de cuatro hojas cada uno para formar 1 200 exámenes, para ello se forman dos grupos de 3 personas; el primer grupo tardará tres horas 40 minutos, mientras que los dos grupos tardarán 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará el segundo grupo en terminar los 1 200 exámenes?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre comparación de distancias y tiempos

En este tipo de problemas se utilizan las siguientes fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme:

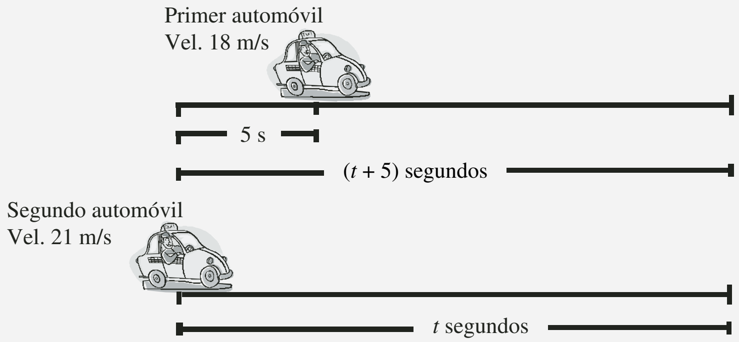
$$v = \frac{d}{t} \qquad d = vt \qquad t = \frac{d}{v}$$

Éstas se usan para determinar la velocidad, distancia y el tiempo, respectivamente.

1 Un automóvil con velocidad constante de 21 m/s sale de la meta 5 segundos después que un automóvil, cuya velocidad constante es de 18 m/s, ¿cuánto tiempo transcurre para que el segundo alcance al primero?

Solución

Datos:



Planteamiento:
Las distancias recorridas son las mismas, pero cada automóvil con distinto tiempo, si $d = vt$, entonces:

Distancia recorrida por el primer automóvil = distancia recorrida por el segundo automóvil

$$18(t + 5) = 21(t)$$

Se resuelve la ecuación:

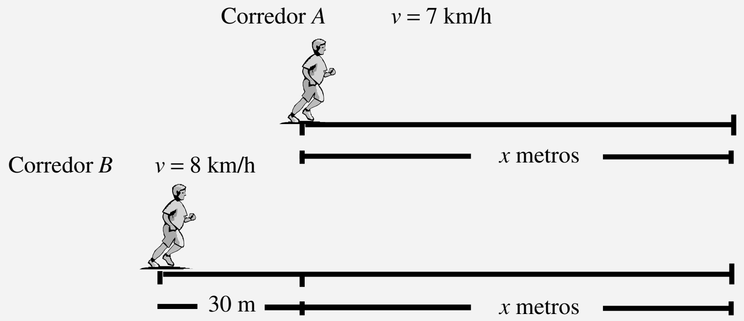
$$18(t + 5) = 21(t) \quad \rightarrow \quad 18t + 90 = 21t$$
$$90 = 21t - 18t$$
$$90 = 3t$$
$$30 = t$$

Esto indica que el segundo automóvil dará alcance al primero en 30 segundos.

2 En cierta competencia de atletismo el corredor A se encuentra a 30 metros adelante del corredor B. El corredor A lleva una velocidad constante de 7 km/h y el corredor B lleva una velocidad constante de 8 km/h. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor B alcanzará al corredor A?

Solución

Datos:



Planteamiento:
La distancia en kilómetros para cada corredor es $\frac{x}{1000}$ y $\frac{30+x}{1000}$, respectivamente.

Al momento de salir el tiempo es el mismo para ambos corredores, si $t = \frac{d}{v}$, entonces;

tiempo para el corredor A = tiempo para el corredor B

$$\frac{\frac{x}{1000}}{7} = \frac{\frac{30+x}{1000}}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{7\,000} = \frac{30+x}{8\,000} \quad \rightarrow \quad 8x = 7(30+x) \quad \rightarrow \quad 8x = 210 + 7x$$

$$8x - 7x = 210$$
$$x = 210$$

El corredor B recorre 210 + 30 = 240 metros antes de alcanzar al corredor A

EJERCICIO **71**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un automóvil que viaja a 60 m/s pasa por el punto A 12 segundos antes de que un automóvil que viaja a 80 m/s pase por el mismo punto, ¿cuánto tiempo transcurre antes de que el segundo automóvil alcance al primero?
2. Dos personas se encuentran a una distancia de 55 metros, ¿después de cuánto tiempo se encontrarán si la primera camina a 1 m/s y la segunda a 1.2 m/s?
3. Un automóvil con una velocidad constante de 60 km/h va por la avenida Viaducto, en sentido contrario viaja un segundo automóvil a una velocidad constante de 90 km/h. Si la distancia que los separa es de 25 km, ¿después de cuánto tiempo se cruzarán?
4. Un par de guardabosques tienen aparatos de radiocomunicación, con un alcance máximo de 2 kilómetros. Uno de ellos realiza su recorrido hacia el oeste a las 12:00 p.m. a una velocidad de 4 km/h, mientras que el otro sale de la misma base a las 12:10 p.m. y camina hacia el este a una velocidad de 6 km/h. ¿A qué hora dejan de comunicarse ambos guardabosques?

5. Una lancha que viaja a 12 m/s pasa por debajo de un puente 3 segundos después que un bote que viaja a 9 m/s, ¿después de cuántos metros la lancha alcanzará al bote?
6. Dos automóviles se cruzan en dirección opuesta, si el primero lleva una velocidad de 24 m/s y el segundo una velocidad de 26 m/s, ¿cuántos segundos transcurren cuando los automóviles están a 800 m uno del otro?
7. Un motociclista persigue a un automóvil, el automóvil lleva una velocidad de 80 km/h y la motocicleta 120 km/h. Si el automóvil le lleva una ventaja de 500 m, ¿qué distancia debe recorrer la motocicleta para alcanzarlo?
8. Una persona que viaja a 3.6 km/h pasa por el punto A a las 14:15 p.m.; 18 minutos después pasa un automóvil por el mismo punto a una velocidad de 68.4 km/h, ¿a qué hora alcanza el automóvil a la persona?
9. Dos personas se encuentran a las 8:34 a.m., la primera camina a 1.5 m/s hacia el oeste y la segunda camina hacia el este a 0.5 m/s, ¿a qué hora la distancia entre ellos es de 360 m?
10. Dos automóviles parten en sentido contrario del punto A, el primero parte a las 20:12 p.m. con una velocidad constante de 40 km/h y el segundo a las 20:16 p.m. a una velocidad constante de 30 km/h, ¿a qué hora la distancia entre ellos será de 26 km?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas de aplicación a la geometría plana

Para los siguientes problemas se toman en cuenta algunos conceptos básicos de geometría. Aquí se proporcionan algunas fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas.

Figura	Perímetro	Área
Rectángulo	$P = 2(b + h)$	$A = bh$
Cuadrado	$P = 4\,l$	$A = l^2$
Triángulo	$P = l_1 + l_2 + l_3$	$A = \frac{bh}{2}$
Círculo	$P = 2\pi$	$A = \pi r^2$

b = base, h = altura, l = lado, r = radio

1 Dos ángulos complementarios son aquellos que suman 90°, ¿cuánto mide un ángulo si su complemento es el doble más 15°?

Solución

Datos:

Ángulo: x

Complemento: $2x + 15°$

Planteamiento:

Ángulo + Complemento = 90°

$$x + (2x + 15°) = 90°$$

Se resuelve la ecuación:

$$x + 2x + 15° = 90°$$
$$3x + 15° = 90°$$
$$3x = 75°$$
$$x = 25°$$

Por tanto, el ángulo es de 25°

2 El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a $\frac{2}{3}$ de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?

Solución

Datos:

Medida de los lados iguales: x

Medida del lado diferente: $\frac{2}{3}x$

Planteamiento:

Perímetro = suma de los lados = 48

$$x + x + \frac{2}{3}x = 48$$

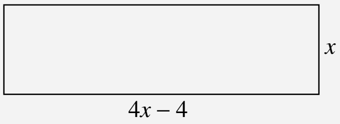
Se resuelve la ecuación:

$$3x + 3x + 2x = 144$$
$$8x = 144$$
$$x = 18$$

Los lados del triángulo isósceles son 18 cm, 18 cm y 12 cm.

3 El largo de un rectángulo mide 4 metros menos que el cuádruple de su ancho y su perímetro mide 32 metros. ¿Cuánto mide el largo?

Solución



Datos:

Ancho o altura: x

Largo o base: $4x - 4$

Perímetro: 32 metros

La fórmula para hallar el perímetro de un rectángulo es: $P = 2(b + h)$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$2[x + (4x - 4)] = 32$$
$$2[5x - 4] = 32$$
$$5x - 4 = 16$$
$$5x = 16 + 4$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$

Por tanto, el largo del rectángulo mide:
$4(4) - 4 = 12$ metros

4 Si se aumentan 8 metros a los lados de un cuadrado el área aumenta en 144 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?

Solución

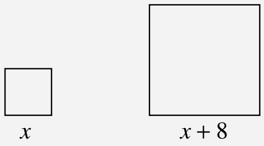
Datos:

Lado del primer cuadrado: x

Lado del segundo cuadrado: $x + 8$

Área del primer cuadrado: x^2

Área del segundo cuadrado: $(x + 8)^2$



La diferencia de las áreas es igual a 144 m^2, se plantea la ecuación y se resuelve:

$$(x + 8)^2 - x^2 = 144$$
$$x^2 + 16x + 64 - x^2 = 144$$
$$16x = 144 - 64$$
$$16x = 80$$
$$x = \frac{80}{16}$$
$$x = 5$$

Por tanto el lado del cuadrado original mide 5 metros.

EJERCICIO 72

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si uno de dos ángulos complementarios mide 34° más que el otro, ¿cuánto mide el ángulo mayor?
2. Dos ángulos son suplementarios si suman 180°, ¿cuál es la medida del ángulo cuyo suplemento es el triple del ángulo?

3. El largo de un rectángulo mide el triple de su ancho; si el perímetro mide 96 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?
4. El largo de un rectángulo mide diez metros más que el doble de su ancho y su perímetro mide 164 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
5. El ancho de un rectángulo mide cinco metros menos que la cuarta parte de su largo y su perímetro mide 80 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
6. El perímetro de un triángulo escaleno mide 23 metros. Si uno de los lados mide dos metros menos que el doble del segundo lado y tres metros más que el tercer lado, ¿cuánto mide cada lado?
7. La base de un triángulo mide 36 cm y su área 144 cm^2. ¿Cuánto mide la altura?
8. Un trozo de madera de 14 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las dos quintas partes de longitud de la otra, ¿cuál es la longitud de cada parte?
9. Una cuerda de 75 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las tres quintas partes del total de la cuerda.
   - Si con el trozo más pequeño se forma una circunferencia, determina su radio.
   - Si con el trozo de mayor longitud se forma un cuadrado, calcula la longitud de uno de sus lados.
10. Si se aumentan ocho metros a cada lado de un cuadrado el área aumenta 160 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?
11. El largo de un rectángulo mide el doble de su ancho. Si se aumentan cuatro metros a cada lado el área aumenta 124 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?
12. El largo de un rectángulo mide cinco metros menos que el triple de su ancho. Si se aumentan 10 metros al largo el área aumenta 60 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?
13. La diferencia entre las áreas de dos círculos es de 209 πm^2. Si el radio del círculo mayor mide once metros más que el radio del círculo menor, ¿cuánto mide el radio del círculo mayor?
14. El área de un rectángulo es de $24u^2$ con un ancho de x. Si el largo se aumenta en 3 y no cambia el ancho, el área resultante es de $33u^2$. Determina las dimensiones del rectángulo inicial.
15. La base de un triángulo excede en dos a su altura; si la base se disminuye en 3 y la altura se aumenta en 2, el área del nuevo triángulo es $3u^2$ menor que el área del triángulo original. Determina las dimensiones del triángulo original
16. Se desea mandar a diseñar una ventana Normanda (forma de rectángulo bajo un semicírculo). El ancho es de tres metros, pero la altura h todavía no se define. Si para dicha ventana se utilizan 24 m^2 de vidrio, determina la altura del rectángulo h.
17. Las dimensiones de un rectángulo están en relación 2:1, si estas dimensiones se aumentan en 3 unidades, el área del nuevo rectángulo excede en $63u^2$ al área del rectángulo inicial, ¿cuál es el largo del rectángulo inicial?
18. El marco de una pintura rectangular mide 5 cm de ancho y tiene un área de 2 300 cm^2. El largo de la pintura mide 20 cm menos que el triple de su ancho. Determina las dimensiones de la pintura sin marco.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Despejes de fórmulas

Al inicio del capítulo se habló de que una ecuación es una fórmula para el cálculo de alguna magnitud. En este caso habrá fórmulas que tengan más de una variable que representen ciertas magnitudes y dependerá cuál se quiera conocer para hacer el despeje.

Para despejar una variable bastará con aplicar la operación inversa a cada miembro de la fórmula. Si el término suma, se resta el mismo valor en ambos miembros, si multiplica, se divide, si es una potencia se obtiene una raíz, etcétera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la fórmula $A = b \cdot h$, despeja b.

Solución

$A = b \cdot h \quad \rightarrow \quad \frac{A}{h} = b$ Se dividen ambos miembros entre h

Por tanto, $b = \frac{A}{h}$

2 Despeja c de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

Solución

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - b^2 = c^2$ Se resta b^2 a ambos miembros

$\sqrt{a^2 - b^2} = c$ y se obtiene la raíz cuadrada

Por consiguiente, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3 Despeja R_1 en la fórmula $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Solución

$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resta $\frac{1}{R_2}$ a ambos miembros

$\frac{R_2 - R_t}{R_t \cdot R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resuelve la fracción

$R_1(R_2 - R_t) = 1(R_t \cdot R_2)$ Se multiplica por $R_1(R_t R_2)$

Finalmente, se obtiene: $R_1 = \frac{R_t \cdot R_2}{R_2 - R_t}$ Se divide entre $R_2 - R_t$

4 Despeja v de la fórmula $E = mgh + \frac{mv^2}{2}$.

Solución

$E = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad E - mgh = \frac{mv^2}{2}$ Se resta mgh

$2(E - mgh) = mv^2$ Se multiplica por 2

$\frac{2(E - mgh)}{m} = v^2$ Se divide entre m

$\sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}} = v$ Se obtiene la raíz cuadrada

Por tanto, $v = \sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}}$

EJERCICIO 73

Realiza lo que se indica en cada caso:

1. Despeja n de la fórmula $PV = n\ r\ t$
2. En $P = 2\ell + 2\ \omega$ despeja ℓ
3. En $y = mx + b$ despeja m
4. En $S = \dfrac{a - \ell r}{1 - r}$ despeja r
5. Despeja F de $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$
6. Despeja r de $A = \pi\, r^2$
7. Despeja b de $A = \dfrac{1}{2}h\ (B + b)$
8. En $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ despeja x_2
9. Despeja h de la fórmula $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
10. Despeja F de la fórmula $r = \dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2 + C^2 - 4AF}$
11. En $u = a + (n - 1)d$ despeja d
12. Despeja r de $u = ar^{n-1}$
13. Despeja P_0 de $P = P_0 e^{kt}$
14. En $a = \dfrac{{V_f}^2 - {V_0}^2}{2d}$ despeja V_0
15. Despeja m de $F = G\dfrac{mM}{r^2}$
16. Despeja i de $M = C(1 + i)^t$
17. En $tg\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, despeja m_1
18. Despeja x de $y = ax^2 + bx + c$
19. En $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p'}$ despeja p'
20. Despeja t de $d = Vt + \dfrac{1}{2}at^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 7

Función lineal

Reseña HISTÓRICA

François Viéte (1540-1603)

Entre el Renacimiento y el surgimiento de la matemática moderna (s. XVII), se desarrolló un periodo de transición en el que se asentaron las bases de disciplinas como el álgebra, la trigonometría, los logaritmos y el análisis infinitesimal. La figura más importante de este periodo fue el francés François Viéte.

Considerado uno de las padres del álgebra, desarrolló una notación que combina símbolos con abreviaturas y literales. Es lo que se conoce como álgebra sincopada, para distinguirla del álgebra retórica utilizada en la antigüedad y el álgebra simbólica que se usa en la actualidad.

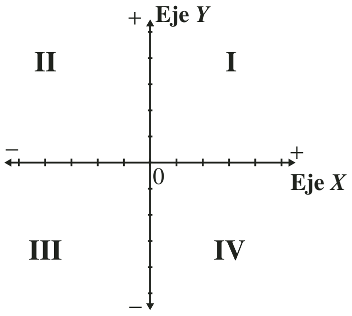
Uno de sus hallazgos más importantes fue establecer claramente la distinción entre variable y parámetro, lo que le permitió plantear familias enteras de ecuaciones con una sola expresión y así abordar la resolución de ecuaciones con un alto grado de generalidad, en lo que se entendió como una aritmética generalizada.

François Viéte (1540-1603)

Plano cartesiano

El plano cartesiano se forma con dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje Y o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano se divide en cuatro regiones llamadas “cuadrantes”. A cada punto P se le asigna un par ordenado o coordenada $P(x, y)$.

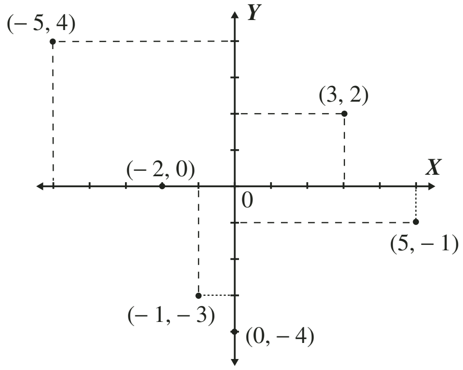


Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen, se avanza tanto como lo indica el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, de ese punto se avanza hacia arriba o hacia abajo, tanto como lo indica el segundo número (ordenada) según sea su signo.

Ejemplo

Grafica los puntos: (– 5, 4), (3, 2), (– 2, 0), (– 1, – 3), (0, – 4) y (5, – 1) en el plano cartesiano.



EJERCICIO 74

Localiza en el plano cartesiano y une los puntos:

1. $A(3, -1)$ y $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$ y $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(-3, -4)$
5. $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$ y $D(4, 2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función

Es la relación que existe entre dos conjuntos, de manera que a los elementos de x les corresponde a lo más un elemento de y. Se denota por:

$$y = f(x)$$

Se lee, y es igual a f de x
donde: x: variable independiente
y: variable dependiente
$f(x)$: regla de correspondencia

Constante

Es la función que asocia un mismo valor a cada valor de la variable independiente

$$y = k$$

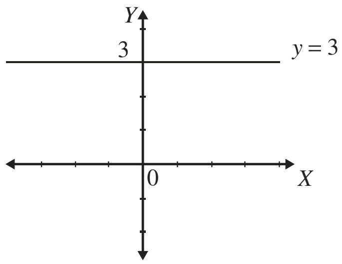
La representación gráfica es una línea recta paralela al eje X, sobre la ordenada k

Ejemplo

Grafica la función $y = 3$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X, sobre la ordenada 3



Ecuación $x = k$

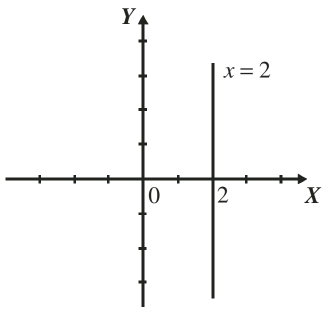
Una ecuación de la forma $x = k$ no es una función. La representación gráfica de esta ecuación es una recta paralela al eje Y que pasa por el valor de la abscisa k

Ejemplo

Representa en una gráfica la ecuación $x = 2$

Solución

Se traza una recta paralela al eje Y, que pasa sobre la abscisa 2



Lineal

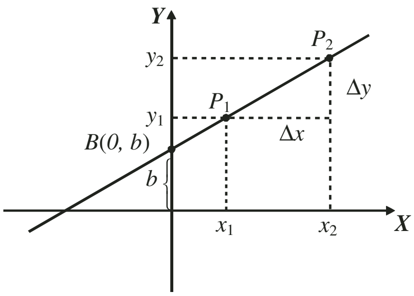
La función de la forma $y = mx + b$ se llama lineal, donde los parámetros m, b representan la pendiente y ordenada al origen, respectivamente.

Ejemplos

Sean las funciones lineales:

1. $y = 5x + 2$ en donde: $m = 5, b = 2$
2. $y = -4x + \frac{4}{7}$ en donde: $m = -4, b = \frac{4}{7}$
3. $y = \frac{2}{3}x - 1$ en donde: $m = \frac{2}{3}, b = -1$
4. $y = -\frac{1}{2}x$ en donde: $m = -\frac{1}{2}, b = 0$
5. $y = 4$ en donde: $m = 0, b = 4$

La pendiente indica el número de unidades que incrementa o disminuye y, cuando x aumenta. La ordenada al origen es la distancia del origen al punto $(0, b)$, este punto se encuentra sobre el eje Y, y es la intersección con la recta.



Donde:

$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = y_2 - y_1$

Dados dos puntos de la recta, la pendiente se obtiene con la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 6)$?

Solución

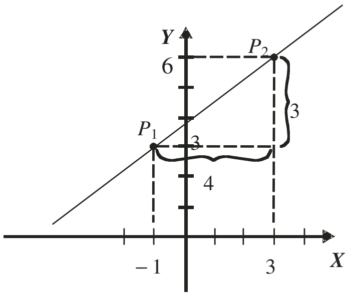
Sea:

$A(-1, 3) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -1$, $y_1 = 3$

$B(3, 6) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 3$, $y_2 = 6$

Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{3-(-1)} = \frac{6-3}{3+1} = \frac{3}{4}$$



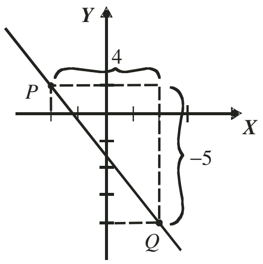
Por tanto, el valor de la pendiente es $\frac{3}{4}$

2 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(2, -4)$?

Solución

Sea:

$P(-2, 1) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -2$, $y_1 = 1$
$Q(2, -4) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 2$, $y_2 = -4$



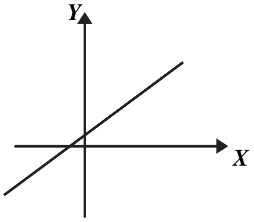
Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-1}{2-(-2)} = \frac{-4-1}{2+2} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$$

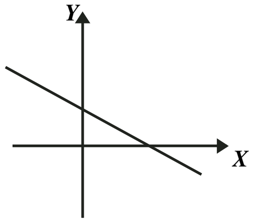
Por consiguiente, el valor de la pendiente es $-\frac{5}{4}$

Generalidades

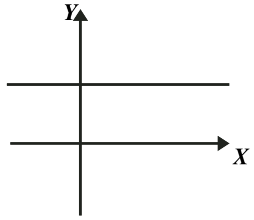
- Si $m > 0$, la función es creciente, es decir, cuando x aumenta, también lo hace y.



- Si $m < 0$, la función es decreciente, es decir, cuando x aumenta, y disminuye.



- Si $m = 0$, se tiene una función constante.



EJERCICIO 75

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1. $A(-2,4)\ y\ B(6,12)$
2. $M(1,5)\ y\ B(2,-7)$
3. $R(-4,-2)\ y\ B(5,6)$
4. $A\left(-\frac{1}{2},3\right)\ y\ B\left(4,-\frac{2}{3}\right)$
5. $A\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right)\ y\ B\left(\frac{3}{10},\frac{1}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica

Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto (0, b).
II. A partir de este punto se localiza otro al tomar a la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

1 Grafica la función $y=\frac{2}{3}x+4$.

Solución

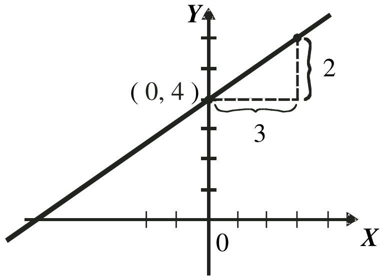
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=\frac{2}{3}x+4$$

$$m=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}$$

$b=4$ que representa el punto (0, 4).

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y=-\frac{4}{5}x+2$.

Solución

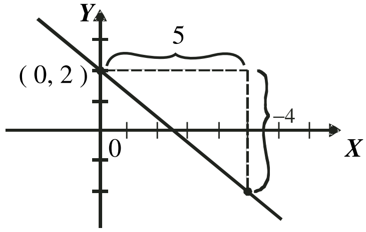
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=-\frac{4}{5}x+2$$

$$m=-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}$$

$b=2$ que representa el punto (0, 2).

Gráfica de la función

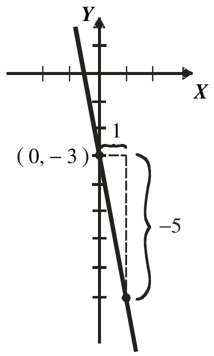


3 Traza la gráfica de la función $y = -5x - 3$.

Solución

La pendiente y ordenada al origen de la función:

Gráfica de la función



$$y = -5x - 3$$

$$m = -5 = \frac{-5}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-5 \text{ decremento vertical}}{1 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = -3$ que representa el punto (0, – 3).

Otra forma de graficar una función lineal es dar valores de *x*, para obtener los respectivos valores de *y,* con estos dos valores se forman puntos coordenados. A este procedimiento se le llama *tabulación.*

Ejemplo

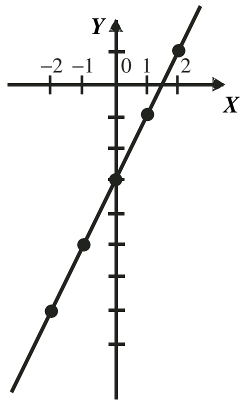
Traza la gráfica de la función $y = 2x - 3$.

Solución

Se construye una tabla con valores arbitrarios en *x*, para obtener los valores respectivos de *y*.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
– 2	$y = 2(-2) - 3 = -7$	(– 2, – 7)
– 1	$y = 2(-1) - 3 = -5$	(–1, – 5)
0	$y = 2(0) - 3 = -3$	(0, – 3)
1	$y = 2(1) - 3 = -1$	(1, – 1)
2	$y = 2(2) - 3 = 1$	(2, 1)

Gráfica de la función



EJERCICIO 76

Grafica las siguientes funciones y ecuaciones:

1. $y = -2$
2. $y = \pi$
3. $x = 4$
4. $x = \frac{3}{2}$
5. $y = 2x + 5$
6. $y = 4x$
7. $y = -\frac{1}{2}x$
8. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
9. $y = \frac{3}{4}x + 3$
10. $y = -\frac{1}{3}x + 3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia de rectas

Se ha visto la función $y = mx + b$ con valores constantes para *m y b,* en este tema analizaremos qué pasa cuando se fija uno de los dos valores y el otro se deja libre. Este tipo de funciones reciben el nombre de *familia de rectas*.

Ejemplos

1. $y = 3x + b$ 2. $y = -x + b$ 3. $y = mx - 7$ 4. $y = mx + 6$

EJEMPLOS

1 Grafica una familia de rectas de la función $y = mx + 2$.

Solución

La función $y = mx + 2$ representa todas las rectas que tienen ordenada al origen 2, es decir, todas las rectas que intersecan al eje Y en el punto (0, 2).

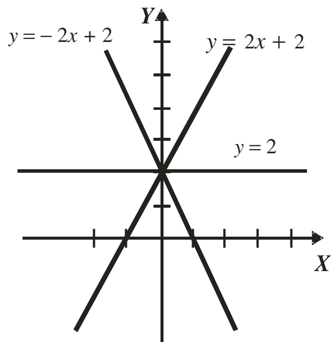
Se grafican algunas de las rectas, con algunos valores para m:

Si $m = 2$, entonces se tiene la recta $y = 2x + 2$

Si $m = -2$, entonces se tiene la recta $y = -2x + 2$

Si $m = 0$, entonces se tiene la recta $y = 2$

Gráfica



2 Grafica una familia de rectas de la ecuación $y = x + b$.

Solución

La función $y = x + b$ representa todas las rectas que tienen pendiente 1

Se grafican algunas de estas rectas, con algunos valores para b:

Si $b = -2$, se tiene la recta $y = x - 2$

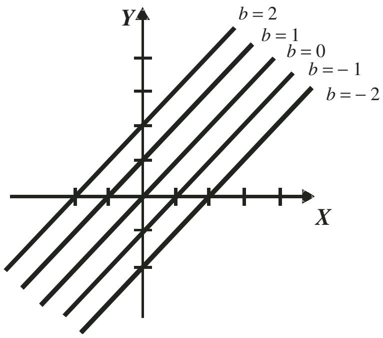
Si $b = -1$, se tiene la recta $y = x - 1$

Si $b = 0$, se tiene la recta $y = x$

Si $b = 1$, se tiene la recta $y = x + 1$

Si $b = 2$, se tiene la recta $y = x + 2$

Gráfica



EJERCICIO 77

Grafica una familia de rectas para cada función:

1. $y = mx + 4$
2. $y = mx - 3$
3. $y = mx + \frac{2}{3}$
4. $y = 2x + b$
5. $y = -x + b$
6. $y = \frac{7}{2}x + b$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Si tenemos dos variables x, y que cumplen la ecuación $y = mx + b$ donde m, $b \in R$, se dice que dichas variables se relacionan linealmente.

Para lo anterior existen problemas de la vida real que se pueden representar con un modelo lineal y así dar un valor estimado de la variable y, para un cierto valor de la variable x.

Ejemplos

1. El salario s que recibe un empleado por trabajar x horas
2. El desgaste d de un artículo que se ha usado t meses

1 Cinco metros de tela tienen un costo de \$300, encuentra un modelo lineal para el costo y determina ¿cuánto cuestan 25m? y ¿cuántos metros de tela se pueden comprar con \$18 000?

Solución

Sean:

x: metros de tela
y: costo por metro de tela
El costo y de x metros de tela se relaciona con la función $y = mx + b$
Si se venden cero metros de tela ($x = 0$), el costo es cero pesos ($y = 0$), entonces, al sustituir estos valores en la función $y = mx + b$, se tiene que:

$$0 = m(0) + b \rightarrow b = 0$$

De tal manera que la función queda de la forma siguiente:

$$y = mx$$

Si $x = 5$, entonces $y = 300$, que son los datos iniciales del problema, con ellos se encuentra el valor de la pendiente, cuando se sustituyen en $y = mx$.

$$y = mx$$

$$300 = m(5) \rightarrow m = \frac{300}{5} = 60 \rightarrow m = 60$$

Por tanto, el modelo lineal es:

$$y = 60x$$

Se quiere conocer el costo de 25 metros de tela.

$$y = 60x$$
$$y = 60(25) = 1500$$

Por consiguiente, 25 m de tela tienen un costo de \$1500
Finalmente, se desea saber cuántos metros de tela se pueden comprar con \$18 000

$$y = 60x$$
$$18\,000 = 60x$$
$$\frac{18\,000}{60} = x$$
$$300 = x$$

Con \$18 000 se pueden comprar 300 metros de tela.

2 El delfín mular mide 1.5 metros al nacer y pesa alrededor de 30 kilogramos. Los delfines jóvenes son amamantados durante 15 meses, al final de dicho periodo estos cetáceos miden 2.7 metros y pesan 375 kilogramos.

Sea L y P la longitud en metros y el peso en kilogramos, respectivamente, para un delfín mular de t meses.

a) Si la relación entre L y t es lineal, expresa L en términos de t.

b) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?

c) Expresa P en términos de t, si P y t están relacionados linealmente.

d) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?

Solución

a) Si la relación entre L y t es lineal, expresa L en términos de t.

$$L = mt + b$$

Cuando el delfín es recién nacido $t = 0$ y $L = 1.5$, al sustituir estos valores en la función anterior se tiene que $b = 1.5$ y el modelo queda de la siguiente forma:

$$L = mt + 1.5 \quad \rightarrow \quad L = mt + \frac{3}{2}$$

Cuando $t = 15$, $L = 2.7$, estos valores se sustituyen en el modelo anterior para determinar la pendiente.

$$L = mt + \frac{3}{2}$$

$$2.7 = m(15) + \frac{3}{2} \quad \rightarrow 2.7 - \frac{3}{2} = 15m \quad \rightarrow \quad \frac{6}{5} = 15m \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{6}{5}}{15} = m$$

$$\frac{2}{25} = m$$

Por tanto, la longitud L en función del tiempo t es:

$$L = \frac{2}{25}t + \frac{3}{2}$$

b) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?
En la función lineal L, la parte que indica el aumento en la longitud del delfín es: $\frac{2}{25}t$, por consiguiente, se divide t entre 30 y se sustituye $t = 1$

$$\frac{t}{30} = \frac{1}{30}$$

Entonces:

$$\frac{2}{25}t = \frac{2}{25}\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{2}{750} = \frac{1}{375} = 0.00267$$

Luego, el aumento diario en la longitud de un delfín es de 0.00267 m.

c) Expresa P en términos de t, si P y t están relacionados linealmente.
Se representa el peso P en función del tiempo t con la función:

$$P = mt + b$$

Cuando el delfín es neonato su peso es de 30 kilogramos, es decir,

$$t = 0 \text{ y } P = 30$$

Al sustituir estos valores en la función anterior se obtiene el valor de b,

$$P = mt + b$$
$$30 = m(0) + b \rightarrow b = 30$$

El modelo matemático para un delfín recién nacido es:

$$P = mt + 30$$

Luego, a los 15 meses un delfín pesa 375 kg, entonces:

Si $t = 15$ y $P = 375$, se tiene que:

$$P = mt + 30$$

$$375 = m(15) + 30 \rightarrow 375 - 30 = 15m \rightarrow 345 = 15m \rightarrow \frac{345}{15} = m \quad \rightarrow \quad m = 23$$

Por consiguiente, el peso P en términos de t se expresa con el modelo:

$$P = 23t + 30$$

d) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?

Para obtener el peso P de un delfín de 5 meses de edad, se sustituye $t = 5$ en el modelo anterior:

$$P = 23t + 30$$
$$P = 23(5) + 30$$
$$P = 115 + 30$$
$$P = 145$$

Por tanto, el peso de un delfín de cinco meses de edad es de 145 kilogramos.

EJERCICIO **78**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un hombre recibe \$120 por 3 horas de trabajo. Expresa el sueldo S (en pesos) en términos del tiempo t (horas).
2. Un bebé pesa 3.5 kg al nacer y 3 años después alcanza 10.5 kg. Supongamos que el peso P (en kg) en la infancia está relacionado linealmente con la edad t (en años).
   a) Expresa P en términos de t.
   b) ¿Cuánto pesará el niño cuando cumpla 9 años?
   c) ¿A qué edad pesará 28 kg?
3. La cantidad de calor C (en calorías), requerida para convertir un gramo de agua en vapor, se relaciona linealmente con la temperatura T (en °F) de la atmósfera. A 50°F esta conversión requiere 592 calorías y cada aumento de 15°F aumenta 9.5 calorías la cantidad de calor. Expresa C en términos de T.
4. El dueño de una franquicia de agua embotellada debe pagar \$500 por mes, más 5% de los ingresos mensuales (I) por concepto de uso de la marca. Los costos de operación de la franquicia incluyen un pago fijo de \$1 300 por mes de servicios y mano de obra. Además, el costo para embotellar y distribuir el agua comprende 50% de los ingresos.
   a) Determina los gastos mensuales G en términos de I.
   b) Expresa la utilidad mensual U en términos de I (utilidad = ingreso − costo)
   c) Indica el ingreso mensual necesario para que no haya pérdida ni ganancia.
5. La relación entre las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius, está dada por: $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$
   a) Encuentra la temperatura en que la lectura es la misma en ambas escalas.
   b) ¿En qué valor debe estar la lectura en grados Fahrenheit para que sea el doble de la lectura en grados Celsius?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 8

Sistemas de ecuaciones

Reseña HISTÓRICA

Gabriel Cramer

Matemático suizo nacido en Ginebra en el año 1704, quien falleció en Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en su obra *Introducción al análisis de las curvas algebraicas* la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

Gabriel Cramer (1704-1752)

Ecuación lineal

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no son cero, recibe el nombre de lineal.

Ejemplos

1. $2x - 3y - 4 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 2$, $B = -3$ y $C = -4$
2. $-5x + 4y = 0$, es una ecuación lineal con: $A = -5$, $B = 4$ y $C = 0$
3. $x + 2 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 1$, $B = 0$ y $C = 2$
4. $2y - 3 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 0$, $B = 2$ y $C = -3$

Una ecuación que se puede escribir de la forma $Ax + By + C = 0$ también es lineal.

Ejemplos

1. Dada la ecuación $2x = 5y - 6$, también se puede escribir de la forma: $2x - 5y + 6 = 0$
2. Para que la ecuación $\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y = 2$ tenga la forma $Ax + By + C = 0$, se eliminan los denominadores al multiplicar por 4 cada término de la igualdad:

$$4\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 4(2)$$

   Al realizar las operaciones se transforma en $10x - 3y = 8$, finalmente:

$$10x - 3y - 8 = 0$$

3. La ecuación $\frac{1}{2}(x - y) - 3y = 4x + 1$, se puede escribir de la forma: $Ax + By + C = 0$, al realizar el producto indicado, eliminar denominadores y simplificar:

$$\frac{1}{2}(x - y) - 3y = 4x + 1$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y = 4x + 1$$
$$2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y\right) = 2(4x + 1)$$
$$x - y - 6y = 8x + 2$$
$$x - y - 6y - 8x - 2 = 0$$

   Por tanto, la ecuación se transforma en: $-7x - 7y - 2 = 0$

4. La ecuación $y = \frac{5}{3}x - 2$ al multiplicarla por 3 se obtiene $3y = 5x - 6$, por consiguiente se puede escribir como: $5x - 3y - 6 = 0$

Solución de una ecuación lineal

Una ecuación lineal tiene como conjunto solución todos los pares ordenados (x, y), que satisfacen la ecuación, donde x y y son números reales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si los pares ordenados (1, – 4), $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, son soluciones de la ecuación: $2x - 3y - 14 = 0$.

Solución

Se sustituye cada par ordenado en la ecuación:

- Para (1, – 4)

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2(1)-3(-4)-14&=0\\ 2+12-14&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por tanto, el par ordenado (1, – 4), es solución.

- Para $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2(2)-3\left(-\frac{10}{3}\right)-14&=0\\ 4+10-14&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el par ordenado $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$ es solución.

- Para $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(-\frac{3}{4}\right)-14&=0\\ 1+\frac{9}{4}-14&=0\\ -\frac{43}{4}&\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, el par ordenado $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ no es solución.

2 Verifica si el punto (– 2, 1), es solución de la ecuación $x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(y-x)-5$

Solución

Se sustituye el punto en la ecuación:

$$\begin{aligned} x+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}(y-x)-5\\ -2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1-(-2)]-5\\ -2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1+2]-5 \end{aligned}$$

(continúa)

(*continuación*)

$$-2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(3)-5$$
$$-2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-5$$
$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por consiguiente (– 2, 1), es solución de la ecuación.

EJERCICIO 79

1. Verifica si los pares ordenados $(2,-3)$, $(7,0)$ y $(1,5)$ son solución de la ecuación: $3x-5y-21=0$.
2. Verifica si los puntos $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ son solución de la ecuación: $2x+4y+2=0$.
3. Verifica si los pares ordenados $(3,-4)$, $(-3,-12)$ y $\left(\frac{1}{2},2\right)$ son solución de la ecuación: $\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}y+4$.
4. Verifica si el punto $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ es solución de la ecuación: $2(x-y)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(x-8)-y$.
5. Verifica si el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ es solución de la ecuación: $\frac{1}{5}(x+2y)+\frac{1}{10}y=\frac{7}{10}(x+1)-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica

La gráfica de una ecuación lineal $Ax + By + C = 0$, es una recta que forman los puntos de su conjunto solución: $\{(x,y)|Ax+By+C=0\}$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $2x - 3y + 7 = 0$?

Solución

Para obtener la gráfica, basta con conocer dos puntos de la recta, para lo cual se sustituyen dos valores arbitrarios para x o y en la ecuación, y con esto se obtienen los dos puntos que se requieren.

Sea $x = -2$, se sustituye y se despeja y:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(-2)-3y+7=0$$
$$-4-3y+7=0$$
$$3-3y=0$$
$$-3y=-3$$
$$y=\frac{-3}{-3}$$
$$y=1$$

Por tanto, el punto es (–2,1)

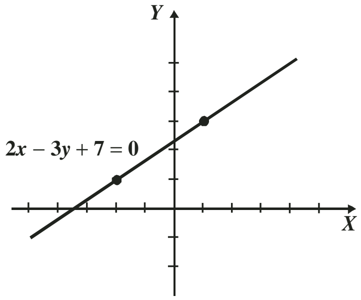
Sea $x = 1$, se sustituye y se despeja y:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(1)-3y+7=0$$
$$2-3y+7=0$$
$$9-3y=0$$
$$-3y=-9$$
$$y=\frac{-9}{-3}$$
$$y=3$$

Por consiguiente, el punto es $(1,3)$

Por último, se localizan los puntos en el plano y se traza una recta sobre ellos.

Gráfica



Otra forma de graficar $Ax + By + C = 0$, es transformarla a la forma $y = mx + b$ y aplicar algunos de los métodos vistos en el capítulo 7.

Ejemplo

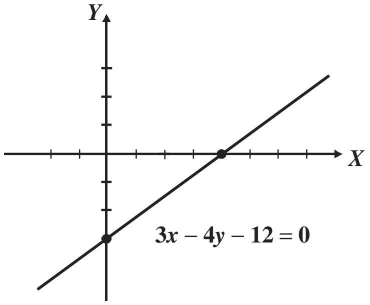
Grafica la ecuación $3x - 4y - 12 = 0$.

Solución

Se despeja y en la ecuación para expresarla a la forma $y = mx + b$

$$3x - 4y - 12 = 0$$
$$-4y = -3x + 12$$
$$y = \frac{-3x + 12}{-4}$$
$$y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4}$$
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{12}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

Gráfica



Los valores respectivos de la pendiente y ordenada al origen son: $m = \frac{3}{4}$ y $b = -3$

EJERCICIO 80

Grafica las siguientes ecuaciones:

1. $x + y - 3 = 0$
2. $x - y + 2 = 0$
3. $3x - 2y + 6 = 0$
4. $4x + 3y - 12 = 0$
5. $3x - 4y = 0$
6. $2x + 7y = 0$
7. $-3x + 5y - 10 = 0$
8. $8x = 2y - 4$
9. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$
10. $-\frac{3}{5}x = \frac{1}{10}y - 2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se ha visto que el conjunto solución de la ecuación $Ax + By + C = 0$, son todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación.

En un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

El conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen ambas ecuaciones, es decir:
$\{(x,y)|a_1x+b_1y=c_1\}\cap\{(x,y)|a_2x+b_2y=c_2\}$

Cada ecuación representa una recta en el plano, entonces, se pueden presentar tres casos:

I. Las rectas se intersecan en un punto. Las rectas sólo coinciden en un punto, por tanto, se dice que el sistema tiene una solución.

Ejemplo

Grafica y determina la solución del siguiente sistema:

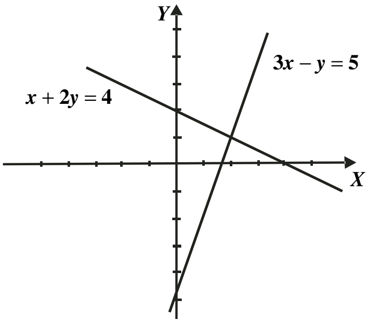
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Solución

Se grafica cada una de las ecuaciones a partir de encontrar las intersecciones con los ejes XY.

$x + 2y = 4$		$3x - y = 5$	
Sea $x = 0$	Sea $y = 0$	Sea $x = 0$	Sea $y = 0$
$x+2y=4$	$x+2y=4$	$3x-y=5$	$3x-y=5$
$(0)+2y=4$	$x+2(0)=4$	$3(0)-y=5$	$3x-(0)=5$
$y=\frac{4}{2}=2$	$x=4$	$y=-5$	$x=\frac{5}{3}$
La intersección con el eje y es: $(0,2)$	La intersección con el eje x es: $(4,0)$	La intersección con el eje y es: $(0,-5)$	La intersección con el eje x $\left(\frac{5}{3},0\right)$

Gráfica



La solución es el punto donde se intersecan las rectas, en este caso (2, 1)

II. Las rectas son coincidentes. Dos ecuaciones representan rectas coincidentes si al multiplicar una de ellas por un número real k, se obtiene la otra.

En un sistema de rectas coincidentes el conjunto solución es infinito, es decir, el conjunto solución son todos los puntos de las rectas.

Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x-6y=18 \end{cases}$$

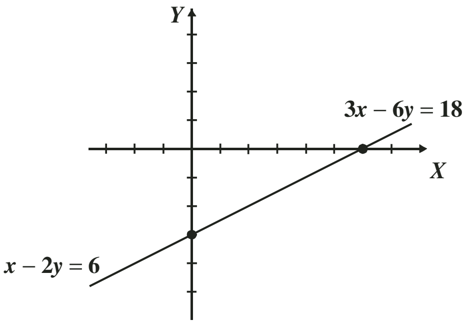
Solución

Se grafica cada recta.

$x - 2y = 6$		$3x - 6y = 18$	
Sea $x = 0$	Sea $y = 0$	Sea $x = 0$	Sea $y = 0$
$x-2y=6$	$x-2y=6$	$3x-6y=18$	$3x-6y=18$
$(0)-2y=6$	$x-2(0)=6$	$3(0)-6y=18$	$3x-6(0)=18$
$y=\frac{6}{-2}=-3$	$x=6$	$y=\frac{18}{-6}$	$x=\frac{18}{3}$
		$y=-3$	$x=6$
El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$	El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$

Se observa que las intersecciones de las rectas con los ejes, son los mismos puntos.

Gráfica



Las rectas coinciden en todos sus puntos, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.
Se observa que si multiplicamos la ecuación $x - 2y = 6$, por 3, se obtiene la otra ecuación.

III. Las rectas son paralelas. En este caso, las rectas no tienen ningún punto en común, por tanto, el sistema no tiene solución.

Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=-12 \end{cases}$$

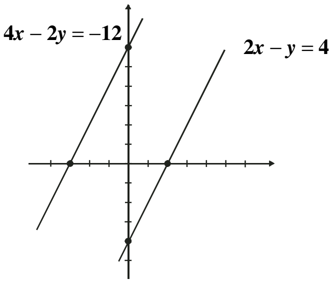
Solución

Se grafican las rectas.

$2x - y = 4$		$4x - 2y = -12$	
Sea $x = 0$	Sea $y = 0$	Sea $x = 0$	Sea $y = 0$
$2x - y = 4$	$2x - y = 4$	$4x - 2y = -12$	$4x - 2y = -12$
$2(0) - y = 4$	$2x - (0) = 4$	$4(0) - 2y = -12$	$4x - 2(0) = -12$
$y = -4$	$x = \frac{4}{2} = 2$	$y = \frac{-12}{-2}$	$x = \frac{-12}{4}$
	$x = 2$	$y = 6$	$x = -3$
El punto es: $(0, -4)$	El punto es: $(2, 0)$	El punto es: $(0, 6)$	El punto es: $(-3, 0)$

Se localizan los puntos de intersección y se grafican las rectas.

Gráfica



Al graficar las rectas se observa que son paralelas, es decir, no hay un punto común, por consiguiente no hay solución, entonces se dice que el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 81

Grafica y determina el conjunto solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x - 15y = -15 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - 3y = -11 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = -9 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Métodos de solución

Hasta ahora se ha visto cómo resolver de forma gráfica un sistema de ecuaciones con dos variables, sin embargo, este método en algunas ocasiones puede ser poco preciso, por lo que existen procedimientos algebraicos y que además de ser prácticos resultan exactos.

Reducción (suma y resta)

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ 3x-4y=-6 \end{cases}$$

Solución

Se elige la variable a eliminar, en este ejemplo se toma x; para eliminarla se necesita que los coeficientes de x de cada ecuación sean iguales y de distinto signo. La primera ecuación se multiplica por – 3 y la segunda se multiplica por 2, posteriormente se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{matrix} (2x+5y=19)(-3) \\ (3x-4y=-6)(2) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} -6x-15y=-57 \\ 6x\ \ -8y=-12 \\ \hline -23y=-69 \end{array}$$

$$y=\frac{-69}{-23}$$

$$y=3$$

El valor de $y = 3$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de x.

$$2x+5y=19 \rightarrow 2x+5(3)=19$$

$$2x+15=19$$
$$2x=19-15$$
$$2x=4$$
$$x=\frac{4}{2}$$
$$x=2$$

Se puede comprobar el resultado al sustituir los valores obtenidos en la otra ecuación:

$$3x-4y=-6 \rightarrow 3(2)-4(3)=-6 \rightarrow 6-12=-6 \rightarrow -6=-6$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$

2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x-3y=-7 \\ 3x+5y=-11 \end{cases}$$

Solución

En este ejemplo se elimina la variable y, entonces se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 3

$$\begin{matrix} (5x-3y=-7)(5) \\ (3x+5y=-11)(3) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 25x-15y=-35 \\ 9x+15y=-33 \\ \hline 34x\qquad=-68 \end{array}$$

$$x=\frac{-68}{34}=-2$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El valor de $x = -2$, se sustituye, en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de y.

$$3x+5y=-11 \rightarrow 3(-2)+5y=-11$$
$$-6+5y=-11$$
$$5y=-11+6$$
$$5y=-5$$
$$y=-1$$

Por consiguiente, la solución del sistema es: $x = -2$, $y = -1$

Los siguientes conjuntos indican el conjunto solución de un sistema de rectas coincidentes y paralelas, respectivamente.

$$\{(x,y)|0x+0y=0\}=\{(x,y)|x,y\in R\}$$

$$\{(x,y)|0x+0y=a, a\neq 0\}=\phi$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 6x-2y=10 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Solución

La primera ecuación se multiplica por 1 y la segunda por -2 y se suman las ecuaciones equivalentes:

$$\begin{matrix}(6x-2y=10)(1) \\ (3x-y=5)(-2)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 6x-2y=10 \\ -6x+2y=-10 \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$

Se obtiene la ecuación $0x + 0y = 0$, por tanto, hay un conjunto infinito de soluciones; entonces, se trata de dos rectas coincidentes, y se dice que al conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones.

2 Encuentra el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} -x+2y=4 \\ -3x+6y=5 \end{cases}$$

Solución

La primera ecuación se multiplica por -3 y la segunda por 1 y se suman las ecuaciones equivalentes.

$$\begin{matrix}(-x+2y=4)(-3) \\ (-3x+6y=5)(1)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-6y=-12 \\ -3x+6y=5 \\ \hline 0x+0y=-7 \end{array}$$

Resulta la ecuación $0x + 0y = -7$, por consiguiente, el conjunto solución es el vacío.

EJERCICIO 82

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 12x-18y=13 \\ -12x+30y=-19 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-4y=-26 \\ 2x-3y=-19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 7x+6y=38 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5a+3b=21 \\ -2a+4b=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5m+n=-1 \\ 3m+2n=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x+2y=-3 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6u+4v=5 \\ 9u-8v=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 9x-12y=21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -20x+5y=2 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7p-q=2 \\ -21p+3q=5 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

EJEMPLOS

1 Determina los valores de x y y en el sistema: $\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$.

Solución

En este ejemplo se despeja x de la primera ecuación.

$$3x-4y=-11 \rightarrow \quad 3x=4y-11$$

$$x=\frac{4y-11}{3}$$

Se sustituye el despeje en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$5x+3y=1 \quad \rightarrow \quad 5\left(\frac{4y-11}{3}\right)+3y=1 \qquad \text{Se multiplica por 3}$$

$$5(4y-11)+9y=3$$
$$20y-55+9y=3$$
$$20y+9y=3+55$$
$$29y=58$$
$$y=\frac{58}{29}$$
$$y=2$$

Se sustituye el valor de $y = 2$ en el despeje $x=\frac{4y-11}{3}$

$$x=\frac{4(2)-11}{3}=\frac{8-11}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

Por tanto, los valores son:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

2 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} -x+y=-7 \\ 5x+3y=3 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de la primera ecuación.

$$-x+y=-7$$
$$y=x-7$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación.

$$5x+3y=3 \;\rightarrow\; 5x+3(x-7)=3 \;\rightarrow\; 5x+3x-21=3$$
$$8x-21=3$$
$$8x=24$$
$$x=3$$

Se sustituye $x = 3$, en el despeje $y=x-7$

$$y=3-7=-4$$
$$y=-4$$

Finalmente, el punto de intersección del sistema es $(3,-4)$

3 Obtén el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x+y=-4 \\ 6x-3y=12 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de la primera ecuación.

$$-2x+y=-4 \;\rightarrow\; y=2x-4$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6x-3(2x-4)=12$$
$$6x-6x+12=12$$
$$6x-6x=12-12$$
$$0x=0$$

La ecuación $0x = 0$ indica que las rectas son coincidentes y tienen como conjunto solución todos los números reales, esto significa que el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 6x-8y=3 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de la primera ecuación.

$$3x-4y=7 \;\rightarrow\; 3x=4y+7 \;\rightarrow\; x=\frac{4y+7}{3}$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6\left(\frac{4y+7}{3}\right)-8y=3$$
$$2(4y+7)-8y=3$$
$$8y+14-8y=3$$
$$8y-8y=3-14$$
$$0y=-11 \quad \text{La ecuación no tiene solución}$$

Por tanto, el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 83

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2m-5n=14 \\ 5m+2n=-23 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6r-5t=-11 \\ 7t-8r=15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x-2y=-3 \\ 7y-12x=17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x-y=75 \\ 5x-2y=42 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -5x-15y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4p-3q=-2 \\ 20p-15q=-1 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Igualación

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+6y=-45 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones.

$$2x-3y=9 \qquad\qquad 5x+6y=-45$$
$$2x=3y+9 \qquad\qquad 5x=-6y-45$$
$$x=\frac{3y+9}{2} \qquad\qquad x=\frac{-6y-45}{5}$$

(continúa)

(*continuación*)

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{3y+9}{2}=\frac{-6y-45}{5}$$
$$5(3y+9)=2(-6y-45)$$
$$15y+45=-12y-90$$
$$15y+12y=-90-45$$
$$27y=-135$$
$$y=\frac{-135}{27}=-5$$

El valor de $y=-5$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$x=\frac{3y+9}{2}$$
$$x=\frac{3(-5)+9}{2}=\frac{-15+9}{2}$$
$$x=\frac{-6}{2}=-3$$
$$x=-3$$

Por consiguiente, el punto de intersección es (–3, – 5)

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6m-7n=4 \\ 2m-14n=-1 \end{cases}$$

Solución

Se despeja n de ambas ecuaciones.

$$6m-7n=4$$
$$-7n=-6m+4$$
$$n=\frac{-6m+4}{-7}$$

$$2m-14n=-1$$
$$-14n=-2m-1$$
$$n=\frac{-2m-1}{-14}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{-6m+4}{-7}=\frac{-2m-1}{-14}$$
$$-14(-6m+4)=-7(-2m-1)$$
$$84m-56=14m+7$$
$$84m-14m=7+56$$
$$70m=63$$
$$m=\frac{63}{70}$$
$$m=\frac{9}{10}$$

El valor de $m=\frac{9}{10}$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$n=\frac{-2m-1}{-14}.$$
$$n=\frac{-2\left(\frac{9}{10}\right)-1}{-14}$$
$$n=\frac{-\frac{14}{5}}{-14}$$
$$n=\frac{14}{(14)(5)}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases} m=\frac{9}{10} \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -8x+4y=-20 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de ambas ecuaciones y se obtiene:

$$2x-y=5 \;\rightarrow\; y=\frac{-2x+5}{-1} \;;\; -8x+4y=-20 \;\rightarrow\; y=\frac{8x-20}{4}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-2x+5}{-1}=\frac{8x-20}{4} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} 4(-2x+5)&=-1(8x-20) \\ -8x+20&=-8x+20 \\ -8x+8x&=-20+20 \\ 0x&=0 \end{aligned}$$

La solución son todos los números reales y el conjunto solución corresponde a todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación:

$$2x-y=5$$

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -15x-20y=7 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x+4y&=-2 \\ 3x&=-4y-2 \\ x&=\frac{-4y-2}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -15x-20y&=7 \\ -15x&=20y+7 \\ y&=\frac{20y+7}{-15} \end{aligned}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-4y-2}{3}=\frac{20y+7}{-15} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} -15(-4y-2)&=3(20y+7) \\ 60y+30&=60y+21 \\ 60y-60y&=21-30 \\ 0y&=-9 \end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución, por tanto, el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 84

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

1. $\begin{cases} x-2y=11 \\ x+5y=-17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -m+n=-1 \\ 4m-2n=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4a+5b=-3 \\ -7b+3a=-13 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x+3y=18 \\ -5y+x=-23 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3p-2q=-5 \\ 2p+q=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+y=-20 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2a+b=1 \\ -5b-6a=-9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3m-5n=1 \\ 9m+15n=9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6u-3v=7 \\ 8u-5v=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x-24y=36 \\ -3x+12y=-18 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+3y=4 \\ -4x-12y=8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3p-9q=5 \\ p-3q=6 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cramer (determinantes)

1. Determinante de 2 × 2. Un determinante de 2 × 2 es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

EJEMPLOS

1 Encuentra el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6)-(3)(-5) = -12+15 = 3$$

Por tanto, el resultado es 3

2 ¿Cuál es el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix}$?

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)(6)-\left(-\frac{4}{5}\right)(3) = -3+\frac{12}{5} = \frac{-15+12}{5} = -\frac{3}{5}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{3}{5}$

3 Determina $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix} = (a)(a-b)-(a^2-b^2)(1) = a^2-ab-a^2+b^2 = b^2-ab$$

Por consiguiente, el resultado es b^2-ab

4 Resuelve $\dfrac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\frac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}} = \frac{(x)(x-3)-(4)(3-x)}{(x^2)(x+9)-(9)(x^2+3)} = \frac{x^2-3x-12+4x}{x^3+9x^2-9x^2-27} = \frac{x^2+x-12}{x^3-27}$$

$$= \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$= \frac{x+4}{x^2+3x+9}$$

Finalmente, el resultado es $\dfrac{x+4}{x^2+3x+9}$

EJERCICIO 85

Encuentra el valor de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -6 & -8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{7}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a & b \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} m-n & m+n \\ m & m-n \end{vmatrix}$

9. $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}$

10. $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b-a \\ b & a-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a & a \end{vmatrix}}$

11. $\dfrac{\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 5 \\ 5 & x \end{vmatrix}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

2. Deducción del método de Cramer. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Por el método de reducción se determina "x"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(b_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(-b_1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-b_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \end{array}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De forma analoga se determina "y"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(-a_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(a_1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1 \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{array}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ con } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El método de Cramer consiste en aplicar las definiciones anteriores y según los resultados se puede concluir que las rectas son:

- **Concurrentes:** si los determinantes son diferentes de cero.
- **Coincidentes:** si los determinantes son todos iguales a cero.
- **Paralelas:** si únicamente el determinante denominador es igual a cero.

Rectas concurrentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \ \ y \ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El sistema tiene una solución que es el punto $P(x, y)$

Ejemplo

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-45-1}{20+3} = \frac{-46}{23} = -2 \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-4+27}{20+3} = \frac{23}{23} = 1$$

Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = 1$, las rectas son concurrentes

Rectas coincidentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema tiene un conjunto infinito de soluciones, es decir, es un sistema de dos rectas coincidentes. Por tanto, el conjunto está formado por todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

Ejemplo

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-8+8}{-4+4} = \frac{0}{0} \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-16}{-4+4} = \frac{0}{0}$$

El sistema son rectas coincidentes, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

Rectas paralelas. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema no tiene solución, es decir, el sistema representa rectas paralelas.

Ejemplo

Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -6x + 3y = 2 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{15+2}{6-6}=\frac{17}{0}\quad ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ -6 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{4+30}{6-6}=\frac{34}{0}$$

Por consiguiente, el sistema no tiene solución.

EJERCICIO 86

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Cramer:

1. $\begin{cases}3x-4y=15\\ -2x+3y=-12\end{cases}$

2. $\begin{cases}4m+9n=-35\\ 3m-8n=18\end{cases}$

3. $\begin{cases}7a-10b=-64\\ 5b+3a=19\end{cases}$

4 $\begin{cases}3x-8y=-13\\ 5y+2x=-19\end{cases}$

5. $\begin{cases}5p-q=7\\ -2p+3q=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}9x-4y=8\\ 6x-2y=3\end{cases}$

7. $\begin{cases}5a-7b=10\\ 8b-6a=-12\end{cases}$

8. $\begin{cases}10m-3n=19\\ 15m-24n=35\end{cases}$

9. $\begin{cases}7u+2v=-5\\ -35u-10v=25\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x-9y=3\\ 18x-81y=-5\end{cases}$

11. $\begin{cases}5x-11y=-6\\ 40x-88y=-7\end{cases}$

12. $\begin{cases}60p-25q=15\\ -12p+5q=-3\end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de dos ecuaciones que se reducen a lineales

Dado un sistema de ecuaciones con dos variables, éste se transforma a:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x+19=3(y-x)\\ 2(x-5y)=5(y-5)-8y\end{cases}$$

Solución

Se realizan las operaciones indicadas en cada ecuación y se simplifican.

$$\begin{aligned}2x+19&=3(y-x)\\ 2x+19&=3y-3x\\ 2x+3x-3y&=-19\\ 5x-3y&=-19\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}2(x-5y)&=5(y-5)-8y\\ 2x-10y&=5y-25-8y\\ 2x-10y-5y+8y&=-25\\ 2x-7y&=-25\end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}5x-3y=-19\\ 2x-7y=-25\end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, reducción.

$$\begin{aligned}(5x-3y&=-19)(-2)\\(2x-7y&=-25)(5)\\\hline -10x+6y&=38\\10x-35y&=-125\\\hline -29y&=-87\\y&=\frac{-87}{-29}\\y&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5x-3y&=-19\\5x-3(3)&=-19\\5x-9&=-19\\5x&=-19+9\\5x&=-10\\x&=\frac{-10}{5}\\x&=-2\end{aligned}$$

Entonces, la solución del sistema $\begin{cases}2x+19=3(y-x)\\2(x-5y)=5(y-5)-8y\end{cases}$ es $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

2 Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4}\\\frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2}\end{cases}$$

Solución

Para eliminar las fracciones se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada ecuación.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4}\right)(20)\\&\frac{20x}{10}-\frac{20y}{5}=\frac{20}{4}\\&2x-4y=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2}\right)(6)\\&\frac{12x}{3}+12y=\frac{30}{2}\\&4x+12y=15\end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x-4y=5\\4x+12y=15\end{cases}$$

y se elige algún método de solución, en este caso el de igualación.

$$\begin{aligned}2x-4y&=5\\2x&=5+4y\\x&=\frac{5+4y}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x+12y&=15\\4x&=15-12y\\x&=\frac{15-12y}{4}\end{aligned}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado:

$$\begin{aligned}\frac{5+4y}{2}&=\frac{15-12y}{4}\\(4)(5+4y)&=(2)(15-12y)\\20+16y&=30-24y\\16y+24y&=30-20\\40y&=10\\y&=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Se sustituye $y=\frac{1}{4}$ en cualquier despeje:

$$\begin{aligned}x&=\frac{5+4y}{2}\\x&=\frac{5+4\left(\frac{1}{4}\right)}{2}\\x&=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}\\x&=3\end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Por consiguiente, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$ es $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

3 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$$

Solución

Se eliminan las fracciones al multiplicarlas por el mínimo común múltiplo y se simplifican las ecuaciones.

$$\left(\frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3\right)(21)$$
$$\frac{(21)(a+5)}{3}+(21)(b)=\frac{(21)(b+5)}{7}+(3)(21)$$
$$7(a+5)+(21)(b)=(3)(b+5)+(3)(21)$$
$$7a+35+21b=3b+15+63$$
$$7a+21b-3b=15+63-35$$
$$7a+18b=43$$

$$\left(\frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5}\right)(5)$$
$$\frac{10(a-3)}{5}+1(5)=\frac{5(b-1)}{5}$$
$$2(a-3)+5=1(b-1)$$
$$2a-6+5=b-1$$
$$2a-b=-1+6-5$$
$$2a-b=0$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7a+18b=43 \\ 2a-b=0 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, sustitución.

De la segunda ecuación se despeja a b.

$$2a-b=0$$
$$2a=b$$

Se sustituye $b=2a$ de la primera, y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$7a+18b=43$$
$$7a+18(2a)=43$$
$$7a+36a=43$$
$$43a=43 \rightarrow a=\frac{43}{43}$$
$$a=1$$

Luego, si $b=2a$ entonces $b=2(1)=2$

Por tanto, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$ es $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

4 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5\sqrt{3}x+1=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right) \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)=2\left(y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Solución

Se resuelven los productos indicados de cada ecuación y se simplifican:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3}x+1&=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right) \\ 5\sqrt{3}x+1&=4\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y \\ 5\sqrt{3}x-4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}y&=-1 \\ \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)&=2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}&=2y-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}&=2y-\frac{2\sqrt{2}}{2} \\ 3x-\sqrt{3}&=2y-\sqrt{2} \\ 3x-2y&=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-1 \\ 3x-2y=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)(-2)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}=\frac{2+2\sqrt{6}-4}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-2}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{6}-1\right)}{2\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}-1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-(3)(-1)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}\sqrt{2}+3}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}=\frac{6-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-6\sqrt{6}\sqrt{2}-2\sqrt{6}\sqrt{3}}{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{72-12}=\frac{30\sqrt{2}}{60}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{cases}$.

Solución

Se multiplica la primera ecuación por 3

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\quad 1\right) & & \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 & \rightarrow & \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{aligned}$$

Se suman las ecuaciones resultantes para eliminar a la variable y, entonces se resuelve la ecuación que se obtiene.

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=3-13 \rightarrow \frac{5}{x}=-10 \rightarrow x=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$$

Luego se sustituye el valor de $x=-\frac{1}{2}$, en la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ y se obtiene el valor de la otra variable.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow -2+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{y}=3 \rightarrow y=\frac{1}{3}$$

Por tanto, la solución al sistema de ecuaciones es $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$

6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=11 \\ \frac{10}{x}-\frac{2}{y}=-13 \end{cases}$.

Solución

El sistema se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=11 \\ 10\left(\frac{1}{x}\right)-2\left(\frac{1}{y}\right)=-13 \end{cases}$$

Se propone un cambio de variable:

Sea $u=\frac{1}{x}$ y $v=\frac{1}{y}$, entonces se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2u+3v=11 \\ 10u-2v=-13 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto.

Las soluciones del sistema son: $u=-\frac{1}{2}; v=4$

Luego, los resultados se sustituyen en los cambios de variable, para hallar el valor de x y y.

Si $u=-\frac{1}{2}$ entonces:

$$u=\frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Si $v=4$ entonces:

$$v=\frac{1}{y}$$
$$4=\frac{1}{y}$$
$$(4)(y)=1$$
$$y=\frac{1}{4}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$$

7 Utiliza el método de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ 2ax-\frac{a^2y}{b}=a^2 \end{cases}$

Solución

Se aplica la solución general.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{b} \\ a^2 & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{(2)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(a^2)\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{b}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{(-3a^2)(b)}{(-3a)(b)}=a$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 2a & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)(a^2)-(2a)(2)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{\frac{a^2}{a}-4a}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{\frac{a^2-4a^2}{a}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{a}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{(-3a^2)(b)}{(-3a)(a)}=\frac{-3a^2b}{-3a^2}=b$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

EJERCICIO 87

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x=y-3 \\ 2y=5+x \end{cases}$

2. $\begin{cases} b=a+7 \\ 3a=2b-17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -7m=2(3n+13) \\ 7n=2(m-5) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7(x+5)+21y=3(y+5)+63 \\ 2(x-3)+5=y-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(m+2)-2(n-4)=2n+m \\ 2(n-1)-m=n \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{12}x-\sqrt{8}y=2 \\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{12}=-\dfrac{2}{3} \\ 2x=3y-22 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=\dfrac{9}{10} \\ 5x=2y+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=-\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{5}{6}y=1 \\ \dfrac{3x}{20}+\dfrac{y}{5}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{2y}{5}=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{3x}{14}-\dfrac{3y}{2}=\dfrac{33}{14} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{3p-5q}{4}=5 \\ \dfrac{q+5p}{6}=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2y+5}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{17}{12} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{2y}{7}=0 \\ \dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{2y}{7}=4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3(a+1)-4=\dfrac{5-(b+1)}{3} \\ 2(a-2)+b=-4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=5 \\ \dfrac{2}{m}+\dfrac{3}{n}=12 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=-1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{10} \\ -\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-\dfrac{7}{10} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-6 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{y}=5 \\ \dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{y}=85 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{ax}{2}+\dfrac{by}{3}=\dfrac{5ab}{6} \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{2a}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=a+b \\ \dfrac{bx}{a}+\dfrac{ay}{b}=2ab \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{a-5b}{a^2-b^2} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x\sqrt{a}+y\sqrt{b}=\dfrac{a^2-b^2}{a-b} \\ x+y=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta importante para la resolución de problemas que involucran a más de dos variables, cuya aplicación es frecuente en la economía, la administración, la física, etcétera.

1 En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar \$1 060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron \$1 100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

Solución

Se plantea con dos variables los precios de los artículos:

x: precio de un pantalón.
y: precio de una camisa.

Con los datos del problema se plantean las ecuaciones simultáneas:
Se multiplica el número de objetos por el precio de cada uno de ellos y la suma será la cantidad de las ventas.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1\,060 \\ 7x + 5y = 1\,100 \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, en este caso por el de reducción:

$$\begin{array}{r} -35x - 49y = -7\,420 \\ 35x + 25y = \quad 5\,500 \\ \hline -24y = -1\,920 \end{array}$$

$$y = \frac{-1\,920}{-24} = 80$$

Se sustituye $y = 80$ en cualquiera de las ecuaciones originales y se obtiene x,

$$5x + 7y = 1\,060$$
$$5x + 7(80) = 1\,060$$
$$5x + 560 = 1\,060$$
$$x = \frac{1\,060 - 560}{5} = 100$$

Por tanto, el precio de un pantalón es de \$100 y el de una camisa de \$80

2 Al revisar sus facturas de pago, el señor Méndez se percata de que la empresa de mensajería y paquetería La Paloma, le cobró \$1 924 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que por los paquetes que envió a Monterrey cobró a \$92 por kilogramo y por los que mandó a Pachuca \$30 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

Solución

Se plantea con dos variables los datos que se deben encontrar:

x: cantidad de kilogramos que se mandaron a Monterrey
y: cantidad de kilogramos que se enviaron a Pachuca

En total se mandaron 29 kilogramos, entonces,

$$x + y = 29$$

Luego, si por cada kilogramo que se envió a Monterrey y Pachuca se cobró \$92 y \$30, respectivamente,

$$92x + 30y = 1\,924$$

entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 92x + 30y = 1\,924 \end{cases}$$

el cual se resolverá por el método de sustitución:

despeje de x

$$x + y = 29$$
$$x = 29 - y$$

sustitución de $x = 29 - y$ en $92x + 30y = 1\,924$

$$92(29 - y) + 30y = 1\,924$$
$$2\,668 - 92y + 30y = 1\,924$$
$$-62y = 1\,924 - 2\,668$$
$$y = \frac{-744}{-62} = 12$$

Al sustituir $y = 12$ en la primera ecuación,

$$x + y = 29$$
$$x + 12 = 29$$
$$x = 29 - 12$$
$$x = 17$$

Por consiguiente, se mandaron 17 kilos a Monterrey y 12 a Pachuca.

EJERCICIO **88**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 225 y su diferencia sea 135
2. Si dos ángulos son suplementarios, su suma es de 180°, si la diferencia entre dos ángulos suplementarios es 100°, ¿cuál es el valor de cada ángulo?
3. La diferencia de dos números es 30 y $\frac{1}{5}$ de su suma es 26. Determina los números.
4. Encuentra dos números, cuya diferencia de sus recíprocos sea 2 y la suma de sus recíprocos sea 14.
5. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$880 y 4 entradas de adulto y 5 de niño, \$570, ¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?
6. Una colección de monedas antiguas de \$5 y \$10, suman la cantidad de \$85. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de \$10 hay?
7. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, cada lado igual excede en 9 cm al largo de la base. Determina las dimensiones del triángulo.
8. Una agenda electrónica y un traductor cuestan \$1 300. Si la agenda electrónica tiene un costo de \$200 más que el traductor, ¿cuánto cuesta cada artículo?
9. El hermano de Antonio es 3 veces más grande que él, hace 3 años su hermano era 6 veces más grande que Antonio, ¿cuáles son sus edades actualmente?
10. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de 2 números es 92 y los $\frac{3}{8}$ de su diferencia es 3. Encuentra los números.
11. Carlos y Gabriel fueron al supermercado a comprar lo necesario para una reunión con amigos del colegio, llevaban un total de \$500 para gastar. Carlos gastó dos terceras partes de su dinero, mientras que Gabriel tres quintas partes, regresaron a casa con un total de \$180, ¿cuánto llevaba cada uno al ir al supermercado?
12. Dividir el número 550 en 2 partes, tales que si de los $\frac{3}{5}$ de la primera se resta $\frac{1}{4}$ de la segunda, se obtiene 160, ¿cuáles son las partes?

13. El cociente de 2 números es 5 y su diferencia es 56, ¿cuáles son los números?
14. La suma de 2 números es 52, su diferencia, dividida entre el menor da 5 como cociente y 3 como residuo, ¿cuáles son los números?
15. Si al dinero que tiene Alejandra se le añaden \$30, tendrá el triple de lo que tiene Beatriz, y si a Beatriz se le agregan \$10, tendrá la mitad de lo que tiene Alejandra, ¿cuánto dinero tiene Alejandra y Beatriz?
16. Una lancha viajó corriente arriba 36 km en 4 horas. Si la corriente hubiese sido del cuádruplo, el viaje lo hubiera hecho en 6 horas, ¿cuál es la rapidez de la lancha y de la corriente?
17. Un granjero posee cierta cantidad de animales, entre gallinas y borregos, de tal forma que al sumar el número de cabezas el resultado es 44 y la suma de las patas es 126. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos tiene?
18. El mismo granjero al comprar los borregos y las gallinas pagó un total de \$6 450. Después y al mismo precio, adquirió 10 borregos y 14 gallinas, por los cuales pagó \$3 420, ¿cuál es el costo de cada borrego y cada gallina?
19. Un vendedor de libros de ciencias vendió tres de geometría analítica y 5 de álgebra lineal en \$870. Al día siguiente, vendió 2 de geometría analítica y 3 de álgebra lineal en \$540, ¿cuál es el precio de cada libro?
20. ¿Cuántos litros de una solución al 6% y cuántos de otra al 30% se deben mezclar para obtener 50 litros de una nueva solución al 12%?
21. Un mexicano especialista en mezclas de café desea exportar el grano en bolsas que contengan un kilogramo. Debe combinar granos de los estados de Chiapas y Veracruz. El costo por kilogramo de estos tipos de café es \$30 y \$24, respectivamente. Si la bolsa cuesta \$25.50, ¿qué cantidad de cada café lleva dicha mezcla?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Métodos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Para resolver un sistema de este tipo, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para resolver los sistemas de dos variables, aunque se recomienda emplear el de *reducción* y de *Cramer*.

El sistema puede tener solución única, conjunto infinito de soluciones o no tener solución.

Reducción (suma y resta)

Se procede de la misma forma que en los sistemas de ecuaciones con dos variables, es decir, se toman dos de las tres ecuaciones y se elimina una de las variables. Posteriormente, se toma cualquiera de las ecuaciones que se eligieron y en la que no se utilizó se elimina la misma variable, de tal manera que se obtienen dos ecuaciones con dos variables; al hallar la solución del sistema se determina el valor de las dos variables, después se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para obtener la tercer variable.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y-5z=-19 \\ 3x-4y+z=-2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned} 2x-3y-5z=-19 & \text{ -------} (1) \\ 3x-4y+z=-2 & \text{ -------} (2) \\ x+y+z=6 & \text{ -------} (3) \end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se toman dos ecuaciones, por ejemplo la ecuación (1) y (2) y por el método de eliminación se elimina x.

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(-3)\\(3x-4y+z=-2)(2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-6x+9y+15z=57\\6x-8y+\ \ 2z=-4\\\hline\end{array}$$

$$y+17z=53-----(A)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (3), se elimina x y se obtiene la ecuación (B)

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(1)\\(\ x+y+z=6)(-2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}2x-3y-5z=-19\\-2x-2y-2z=-12\\\hline\end{array}$$

$$-5y-7z=-31-----(B)$$

Con las ecuaciones (A) y (B) el sistema resultante es:

$$\begin{cases}y+17z=53\\-5y-7z=-31\end{cases}$$

Se resuelve el sistema que resulta de las ecuaciones (A) y (B).

$$\begin{array}{l}(y+17z=53)(5)\\(-5y-7z=-31)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}5y+85z=265\\-5y-7z=-31\\\hline\end{array}$$

$$78z=234$$
$$z=\frac{234}{78}$$
$$z=3$$

Se sustituye el valor de $z=3$ en las ecuaciones (A) o (B) para determinar el valor de y.

$$y+17z=53$$
$$y+17(3)=53$$
$$y+51=53$$
$$y=53-51$$
$$y=2$$

Los valores $z=3$, $y=2$, se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$x+y+z=6\ \rightarrow\ x+2+3=6$$
$$x+5=6$$
$$x=6-5$$
$$x=1$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=1$, $y=2$, $z=3$

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+2z=6\\3y-5z=-17\\2x+3y=-1\end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{l}x\qquad+2z=6---------(1)\\3y-5z=-17-------(2)\\2x+3y\qquad=-1---------(3)\end{array}$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina a y.

$$\begin{array}{l}(3y-5z=-17)(-1)\\(2x+3y\qquad=-1)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-3y+5z=17\\2x+3y\qquad=-1\\\hline\end{array}$$

$$2x\qquad+5z=16------(A)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (A) y se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+2z=6 \\ 2x+5z=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x+2z=6)(-2) \\ (2x+5z=16)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x-4z=-12 \\ \underline{2x+5z=16} \\ z=4 \end{array}$$

El valor de $z=4$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones (1) o (A)

$$\begin{aligned} x+2z&=6 \\ x+2(4)&=6 \\ x+8&=6 \\ x&=6-8 \\ x&=-2 \end{aligned}$$

Para hallar el valor de y, se sustituye $z=4$, en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 3y-5z&=-17 \\ 3y-5(4)&=-17 \\ 3y-20&=-17 \\ 3y&=-17+20 \\ 3y&=3 \\ y&=\frac{3}{3} \\ y&=1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=5 \\ 5x-4y-2z=4 \\ 6x-9y-12z=5 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned} 2x-3y-4z&=5 \text{ --------- } (1) \\ 5x-4y-2z&=4 \text{ --------- } (2) \\ 6x-9y-12z&=5 \text{ --------- } (3) \end{aligned}$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (2x-3y-4z=5)(-5) \\ (5x-4y-2z=4)(2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -10x+15y+20z=-25 \\ \underline{10x-\ \ 8y-\ \ 4z=8} \end{array}$$

$$7y+16z=-17 \text{ --------- } (A)$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (5x-4y-2z=4)(-6) \\ (6x-9y-12z=5)(5) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -30x+24y+12z=-24 \\ \underline{30x-45y-60z=25} \end{array}$$

$$-21y-48z=1 \text{ --------- } (B)$$

(continúa)

(*continuación*)

Con las ecuaciones (A) y (B), se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{cases} 7y+16z=-17 \\ -21y-48z=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (7y+16z=-17)(3) \\ (-21y-48z=1)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 21y+48z=-51 \\ -21y-48z=1 \\ \hline 1y+\ 0z=-50 \end{array}$$

No hay solución para la ecuación $0y+0z=-50$, por tanto, el conjunto solución es vacío.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-5y+2z=6 \\ x-3y-4z=5 \\ 6x-10y+4z=12 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{r} 3x-5y+2z=6 - - - - - - - - - (1) \\ x-3y-4z=5 - - - - - - - - - (2) \\ 6x-10y+4z=12 - - - - - - - (3) \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (3x-5y+2z=6)(1) \\ (x-3y-4z=5)(-3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-5y+\ 2z=6 \\ -3x+9y+12z=-15 \\ \hline 4y+14z=-9 - - - - - - - (A) \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (x-3y-4z=5)(-6) \\ (6x-10y+4z=12)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x+18y+24z=-30 \\ 6x-10y+\ 4z=12 \\ \hline 8y+28z=-18 - - - - - - - (B) \end{array}$$

Se resuelve el sistema que forman las ecuaciones (A) y (B).

$$\begin{cases} 4y+14z=-9 \\ 8y+28z=-18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (4y+14z=-9)(-2) \\ (8y+28z=-18)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -8y-28z=18 \\ 8y+28z=-18 \\ \hline 0y+0z=0 \end{array}$$

Por consiguiente, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

5 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{3y}{4}-\frac{5z}{6}=\frac{9}{2} \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=\frac{13}{6} \\ \frac{3x}{2}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=\frac{-7}{2} \end{cases}$$

Solución

Se eliminan las fracciones de cada ecuación al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{3y}{4}-\frac{5z}{6}=\frac{9}{2}\right)(12) \rightarrow 2x-9y-10z=54 --------- (1)$$

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=\frac{13}{6}\right)(6) \rightarrow x-2y-3z=13 --------- (2)$$

$$\left(\frac{3x}{2}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=\frac{-7}{2}\right)(4) \rightarrow 6x+3y-2z=-14 --------- (3)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l}(2x-9y-10z=54)(-1)\\(x-2y-3z=13)(2)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-2x+9y+10z=-54\\2x-4y-6z=26\\\hline 5y+4z=-28 ------- (A)\end{array}$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l}(x-2y-3z=13)(-6)\\(6x+3y-2z=-14)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-6x+12y+18z=-78\\6x+3y-2z=-14\\\hline 15y+16z=-92 ------- (B)\end{array}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones entre (A) y (B)

$$\begin{cases}5y+4z=-28\\15y+16z=-92\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(5y+4z=-28)(-3)\\(15y+16z=-92)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-15y-12z=84\\15y+16z=-92\\\hline 4z=-8\\z=-\frac{8}{4}\\z=-2\end{array}$$

El valor de z se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned}5y+4z&=-28\\5y+4(-2)&=-28\\5y-8&=-28\\5y&=-28+8\\5y&=-20\\y&=-\frac{20}{5}\\y&=-4\end{aligned}$$

Luego los valores de $y=-4, z=-2$ se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para hallar el valor de x.

$$\begin{aligned}x-2y-3z&=13\\x-2(-4)-3(-2)&=13\\x+8+6&=13\\x+14&=13\\x&=13-14\\x&=-1\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases}x=-1\\y=-4\\z=-2\end{cases}$$

Determinantes

Un determinante de tres por tres es un arreglo rectangular de números de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para hallar el determinante de un arreglo rectangular de números de la forma anterior, se repiten los 2 primeros renglones y su solución está dada por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2\right) - \left(a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_2 \cdot c_1\right)$$

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Se aplican las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo

Determina la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ x - y + 4z = 19 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

Solución

Se aplican las fórmulas y se hallan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\left(-12 + 57 + 64\right) - \left(38 - 144 + 8\right)}{\left(-3 + 3 + 40\right) - \left(2 - 36 + 5\right)} = \frac{207}{69} = 3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 12 & -1\\ 1 & 19 & 4\\ 5 & 8 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ 5 & -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 12 & -1\\ 1 & 19 & 4\\ 5 & 8 & 1\\ 3 & 12 & -1\\ 1 & 19 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ 5 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{(57-8+240)-(12+96-95)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{276}{69}=4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 12\\ 1 & -1 & 19\\ 5 & -3 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ 5 & -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 12\\ 1 & -1 & 19\\ 5 & -3 & 8\\ 3 & 2 & 12\\ 1 & -1 & 19\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ 5 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{(-24-36+190)-(16-171-60)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{345}{69}=5$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es: $\begin{cases}x=3\\ y=4\\ z=5\end{cases}$

EJERCICIO 89

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases}2x-y+5z=16\\ x-6y+2z=-9\\ 3x+4y-z=32\end{cases}$

2. $\begin{cases}d-e-4f=-4\\ 2d+2e+f=11\\ d+e+3f=13\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-2y+3z=10\\ 2x+y-6z=1\\ 4x-2y-9z=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}3x+5y-z=4\\ 10y-6x-3z=1\\ 4z-15y+9x=-1\end{cases}$

5. $\begin{cases}4n-2m-3r=1\\ m+3n-5r=-4\\ 3m-5n+r=0\end{cases}$

6. $\begin{cases}\frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=7\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=5\\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=11\end{cases}$

7. $\begin{cases}3x-2y+z=16\\ 2x+3y-8z=2\\ x-y+3z=14\end{cases}$

8. $\begin{cases}a+b=3\\ a-c=8\\ b-2c=4\end{cases}$

9. $\begin{cases}m+r=8\\ 2n-3r=3\\ 2m+3n-4r=19\end{cases}$

10. $\begin{cases}x=2(1+2y)-9z\\ y=2(2z-x)-13\\ z=2(y+4)+3x\end{cases}$

11. $\begin{cases}x-y+z=4\\ 2x+y-z=5\\ x+3y-4z=-5\end{cases}$

12. $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}-\frac{1}{c}=11\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=7\\ \frac{3}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=8\end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Tres profesores compraron libros: uno de ellos pagó $845 por 3 de álgebra, 5 de geometría analítica y 2 de cálculo diferencial; otro pagó $580 por 2 de geometría analítica, 4 de álgebra y uno de cálculo diferencial; el último de ellos pagó $605 por uno de álgebra, 3 de geometría analítica y 3 de cálculo diferencial. ¿Cuál es el precio de cada libro?

Solución

Sea x: costo del libro de álgebra
y: costo del libro de geometría analítica
z: costo del libro de cálculo diferencial

El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 845 \ldots\ldots (1) \\ 4x + 2y + z = 580 \ldots\ldots (2) \\ x + 3y + 3z = 605 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción para eliminar z:

Al multiplicar por – 2 la ecuación (2) y sumar con la ecuación (1)

$$\begin{array}{r} -8x - 4y - 2z = -1\,160 \\ 3x + 5y + 2z = 845 \\ \hline -5x + y = -315 \end{array}$$

Al multiplicar por – 3 la segunda ecuación y sumar la ecuación (3)

$$\begin{array}{r} -12x - 6y - 3z = -1\,740 \\ x + 3y + 3z = 605 \\ \hline -11x - 3y = -1\,135 \end{array}$$

Se realiza un nuevo sistema con las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} 3(-5x + y = -315) \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -15x + 3y = -945 \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -26x = -2\,080 \end{array}$$

$$x = \frac{-2\,080}{-26}$$

$$x = 80$$

Si $x = 80$, entonces

$$-5(80) + y = -315 \rightarrow -400 + y = -315 \rightarrow y = -315 + 400 = 85$$

Si $x = 80$, $y = 85$, por tanto

$$3(80) + 5(85) + 2z = 845 \rightarrow 240 + 425 + 2z = 845 \rightarrow 2z = 845 - 240 - 425$$

$$= \frac{845 - 240 - 425}{2} = 90$$

Por consiguiente, el libro de álgebra tiene un precio de $80, el de geometría analítica de $85 y el de cálculo diferencial cuesta $90

EJERCICIO 90

Resuelve los siguientes problemas:

1. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó $28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con $25 y el último día, una paleta, un helado y un dulce que le costaron $7. ¿Cuál es el costo de cada golosina?

2. Miguel, Fabián y Juan Carlos cierto día fueron a comprar ropa. Miguel compró 3 camisas, 4 pantalones y 3 playeras; Fabián, 5 camisas, 3 pantalones y 4 playeras y Juan Carlos, 2 camisas, 6 pantalones y una playera. Si pagaron \$4 100, \$4 600 y \$4 000, ¿cuál es el precio de cada prenda?
3. Eduardo, Hugo y Arturo fueron a comprar ropa. Eduardo se compró 3 playeras, 2 pantalones y 5 pares de calcetas y pagó \$1 710. Hugo adquirió 2 playeras, 3 pantalones y 4 pares de calcetas con \$2 090 y Arturo, 4 playeras, 2 pantalones y 3 pares de calcetas por \$1 730. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Un número está formado por 3 dígitos, el dígito de las centenas es la suma de los otros dos, la suma de las decenas y centenas es igual a 7 veces las unidades. Determina el número, de tal manera que si se invierten los dígitos, la diferencia sea 594.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Descomposición de una fracción algebraica en suma de fracciones parciales

Al realizar una suma de fracciones se obtiene la simplificación de la misma, por ejemplo:

$$\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)+1(x+3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{2x+4+x+3}{x^2+3x+2x+6}=\frac{3x+7}{x^2+5x+6}$$

Sin embargo, en ocasiones es necesario descomponer una fracción como la suma de sus fracciones parciales, esto es, realizar el proceso inverso.

Caso I. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x) = (x + x_1)(x + x_2) \cdot \ldots \cdot (x + x_n)$, y ninguno se repite, se puede descomponer en la suma de las fracciones parciales como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x+x_1}+\frac{B}{x+x_2}+\ldots+\frac{Z}{x+x_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $\frac{3x+1}{x^2-x-6}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se factoriza el denominador y a cada factor lineal le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Se desarrolla la suma de fracciones

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Para que se cumpla esta igualdad se igualan los numeradores, el resultado es el siguiente:

$$3x+1=A(x+2)+B(x-3)$$
$$3x+1=Ax+2A+Bx-3B$$

Al agrupar los términos que contienen x y los independientes, resulta:

$$3x+1=x(A+B)+2A-3B$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces se genera un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases}$ que al resolverlo da como resultado $A = 2$ y $B = 1$

Por tanto, la fracción como suma de parciales es:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+2}$$

2 Expresa $\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se descompone en factores el denominador de la fracción:

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x+4}{x(x+2)(x+1)}$$

A cada denominador le corresponde una constante como sigue:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+1)}$$

Los numeradores se igualan:

$$x+4 = A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)$$
$$x+4 = A\left(x^2+3x+2\right)+Bx(x+1)+Cx(x+2)$$
$$x+4 = Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx^2+2Cx$$

Se agrupan términos semejantes:

$$x+4 = x^2(A+B+C)+x(3A+B+2C)+2A$$

Al igualar los respectivos coeficientes, se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A=4 \end{cases}$

El cual se resuelve y el resultado es: $A = 2$, $B = 1$ y $C = -3$

Por tanto, la fracción expresada como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+1}$$

3 ¿Cuál es la descomposición en fracciones parciales $\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}$?

Solución

Se descompone el denominador:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x} = \frac{4x^2-2x+1}{x\left(4x^2-1\right)} = \frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

a cada factor del denominador le corresponde una constante de la siguiente manera:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}$$

Al resolver la fracción del lado derecho:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)}{x(2x+1)(2x-1)}$$

Al igualar los numeradores se obtiene:

$$4x^2-2x+1=A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$
$$4x^2-2x+1=A\left(4x^2-1\right)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$
$$4x^2-2x+1=4Ax^2-A+2Bx^2-Bx+2Cx^2+Cx$$

Al agrupar términos semejantes, se determina que:

$$4x^2-2x+1=x^2(4A+2B+2C)+x(-B+C)-A$$

Al igualar los coeficientes se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases}4A+2B+2C=4\\-B+C=-2\\-A=1\end{cases}$

Este sistema de ecuaciones se resuelve por cualquier método algebraico, del cual resultarán los siguientes valores, $A=-1$, $B=3$ y $C=1$, por tanto, la descomposición de fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}$$

Caso II. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x)=(x+x_1)^n(x+x_2)^n\cdot\ldots\cdot(x+x_3)^n$, todo factor que se repite n veces, se descompone en la suma de fracciones parciales como sigue:

$$\frac{A}{(x+x_1)}+\frac{B}{(x+x_1)^2}+\ldots+\frac{Z}{(x+x_1)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa la fracción: $\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se descompone el denominador en factores:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+2x+1\right)}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

A cada denominador le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores:

$$x^2+x-1 = A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+Cx$$

Al agrupar términos semejantes se determina que:

$$x^2+x-1 = x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para obtener el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=1 \\ A=-1 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método, da como resultado: $A = -1$, $B = 2$ y $C = 1$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x} = -\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

2 ¿Cuál es la descomposición como una suma de fracciones parciales de $\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12}$?

Solución

Se descompone el denominador:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2}$$

A cada factor lineal le corresponde una constante como numerador,

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Al resolver la suma de fracciones parciales resulta que:

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+B(2x+3)(x+2)+C(2x+3)}{(2x+3)(x+2)^2}$$

Se desarrollan los productos e igualan los numeradores:

$$8+3x-x^2 = A\left(x^2+4x+4\right)+B\left(2x^2+7x+6\right)+C\left(2x+3\right)$$

Ahora, al agrupar términos semejantes,

$$8+3x-x^2 = x^2\left(A+2B\right)+x\left(4A+7B+2C\right)+4A+6B+3C$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para formar el siguiente sistema, $\begin{cases} A+2B=-1 \\ 4A+7B+2C=3 \\ 4A+6B+3C=8 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método se determina que: $A=5$, $B=-3$ y $C=2$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{5}{2x+3}-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{\left(x+2\right)^2}$$

EJERCICIO 91

Descompón en suma de fracciones parciales las siguientes fracciones

1. $\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$
2. $\frac{29x-56}{(3x-7)(2x-3)}$
3. $\frac{8}{(5x-4)(5x+4)}$
4. $\frac{x-12}{(x+2)(x-5)}$
5. $\frac{19-4x}{x^2-11x+28}$
6. $\frac{2(2x+7)}{4x^2-1}$
7. $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$
8. $\frac{5x-13}{6x^2+13x-5}$
9. $\frac{5x+1}{12+x-x^2}$
10. $\frac{-11(x+3)}{14-3x-2x^2}$
11. $\frac{3x-5}{9x^2-12x+4}$
12. $\frac{4x^2+7x-12}{x(x+2)(x-3)}$
13. $\frac{2x^2+7x+14}{(x+1)(x-2)(x+4)}$
14. $\frac{3x^2-5x-17}{(x+3)(x-2)^2}$
15. $\frac{16x^2-48x+15}{2x^3-7x^2+3x}$
16. $\frac{9x^2+4x-4}{x^3+x^2-2x}$
17. $\frac{30-30x-29x^2}{6x^3+5x^2-6x}$
18. $\frac{2x^2-6x-26}{x^3+2x^2-5x-6}$
19. $\frac{4x^2+9x+11}{2x^3-x^2-5x-2}$
20. $\frac{-x^2}{x^3+3x^2+3x+1}$
21. $\frac{-x^3-2x^2+5x-1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$
22. $\frac{2x^3-30x}{x^4-18x^2+81}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite, entonces se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{a_1x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{Mx+N}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como una suma de fracciones parciales la siguiente expresión: $\frac{4x^2+6}{x^3+3x}$

Solución

Se factoriza el denominador:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

El denominador se conforma de un factor lineal y un factor cuadrático, entonces la suma se representa como:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se igualan numeradores:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x}+\frac{(Bx+C)}{x^2+3}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$4x^2+6 = A(x^2+3)+(Bx+C)(x)$$
$$4x^2+6 = Ax^2+3A+Bx^2+Cx$$
$$4x^2+6 = x^2(A+B)+Cx+3A$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces se forma el siguiente sistema $\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$, que al resolverse da: $A = 2$, $B = 2$ y $C = 0$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{2}{x}+\frac{2x+0}{x^2+3}=\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+3}$$

2 Descompón en una suma de fracciones parciales la expresión: $\frac{4x^3-11x^2+17x}{(x^2-3x+1)(x^2+2)}$

Solución

El denominador contiene únicamente factores de segundo grado, por tanto, las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{4x^3-11x^2+17x}{(x^2-3x+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Al resolver la suma de fracciones e igualando numeradores se obtiene:

$$4x^3-11x^2+17x = (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2-3x+1)$$
$$4x^3-11x^2+17x = Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3-3Cx^2+Cx+Dx^2-3Dx+D$$

Se agrupan términos semejantes:

$$4x^3-11x^2+17x = x^3(A+C)+x^2(B-3C+D)+x(2A+C-3D)+2B+D$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces:

$$\begin{aligned} A+C&=4\\ B-3C+D&=-11\\ 2A+C-3D&=17\\ 2B+D&=0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se determina que: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ y $D = -4$

Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^3-11x^2+17x}{(x^2-3x+1)(x^2+2)} = \frac{x+2}{x^2-3x+1}+\frac{3x-4}{x^2+2}$$

Caso IV. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y alguno de ellos se repite, entonces a cada factor de la forma: $(ax^2 + bx + c)^n$ le corresponde una suma de fracciones:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+...+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo

Expresa en suma de fracciones parciales la siguiente: $\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x^5+2x^3+x}$

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x^5+2x^3+x} = \frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x(x^2+1)^2}$$

La descomposición es:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x)+(Dx+E)(x)(x^2+1)}{x(x^2+1)^2}$$

Se igualan los numeradores y se desarrollan los productos:

$$3x^4+x^3+4x^2+6x+3 = Ax^4+2Ax^2+A+Bx^2+Cx+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Ex$$

Se agrupan también los términos semejantes:

$$3x^4+x^3+4x^2+6x+3 = x^4(A+D)+x^3(E)+x^2(2A+B+D)+x(C+E)+A$$

(*continúa*)

(*continuación*)

De esta igualdad se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A+D=3 \\ E=1 \\ 2A+B+D=4 \\ C+E=6 \\ A=3 \end{cases}$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores:

$$A=3,\ B=-2,\ C=5,\ D=0 \text{ y } E=1$$

Por tanto, la descomposición como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x^5+2x^3+x} = \frac{3}{x}+\frac{5-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2+1}$$

EJERCICIO 92

Expresa como una suma de fracciones parciales a las siguientes:

1. $\frac{4x^2+x-9}{x^3-3x}$
2. $\frac{4x^2-x-1}{3x^3+3x^2+x+1}$
3. $\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x-2}$
4. $\frac{x^2-19}{x^4-2x^2-35}$
5. $\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}$
6. $\frac{-6x^3+x^2-32x+3}{x^4+8x^2+15}$
7. $\frac{x^4-2x^3-4x^2-11x-6}{x^5+x^3-6x}$
8. $\frac{5x^2-9x-8}{x^3-5x^2+5x+3}$
9. $\frac{11x^3-5x^2-30x-8}{2x^4+3x^2-35}$
10. $\frac{-7x^2-42x+24}{x^3+5x^2-3x}$
11. $\frac{5x^2-18x-1}{2x^3+4x^2-6x-20}$
12. $\frac{x^4+x^3-5x^2-2x+9}{x^5-6x^3+9x}$
13. $\frac{x^3+x^2+x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$
14. $\frac{-5x^4-9x^2+x-7}{x^6+3x^4+3x^2+1}$
15. $\frac{2x^4-x^3-9x^2+3x+11}{x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4}$
16. $\frac{2x^4+10x^3+24x^2+27x+16}{x\left(x^2+3x+4\right)^2}$
17. $\frac{-x^5+x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x^6+2x^4+x^2}$
18. $\frac{4\left(x^2+1\right)}{x^8+4x^6+4x^4}$
19. $\frac{3x^5-3x^3+4x^2-6x-5}{\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+1\right)}$
20. $\frac{2x^5-4x^4+13x^3-3x^2+5x-5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-x+1\right)^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 9

Potenciación

Reseña HISTÓRICA

Exponente de una potencia

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Nicolás Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente en el coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo en el detalle de utilizar números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Geometrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizara la notación elevada, sino que siguiera escribiendo, como muchos hasta entonces, x^2 como xx.

Estas expresiones son residuos de la época griega, en la cual los productos xx (x^2) o xxx (x^3) sólo se entendían como áreas o volúmenes. Por eso nosotros, cuando calculamos el producto de un número x por sí mismo, decimos que estamos elevando x "al cuadrado", aunque no pensemos en absoluto en calcular el área de un cuadrado de lado x.

Definición

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ...}_{n\text{ - veces}}$, donde a es la base y n el exponente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al desarrollar x^4, se obtiene:

Solución

Al ser el exponente 4, la base x se multiplica 4 veces ella misma:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Por consiguiente, cuando se tiene x^4, es lo mismo que si se multiplica 4 veces la base x.

2 ¿Cuál es el resultado de $(-2x)^3$?

Solución

Se multiplica la base por sí misma tres veces, por tanto:

$$(-2x)^3 = (-2x)(-2x)(-2x) = -8x^3$$

Finalmente, se obtiene: $(-2x)^3 = -8x^3$

Teoremas de los exponentes

Si $a, b, m, n \in R$ y $a, b \neq 0$, entonces:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Demostración

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n\text{ veces}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{m\text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n+m\text{ veces}} = a^{n+m}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $x^3 \cdot x^5$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

2 Encuentra el resultado de $(-5m)(8m^3)(-2m^2)$.

Solución

Se multiplican los coeficientes $(-5)(8)(-2)$, después se aplica el teorema y se obtiene:

$$(-5m)(8m^3)(-2m^2) = 80m^{1+3+2} = 80m^6$$

$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{n \text{ veces}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \text{ veces}} = a^{m-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\frac{m^5}{m^2}$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$$

2 Encuentra el resultado de: $\frac{-27m^7}{-3m^3}$.

Solución

Primero se dividen los coeficientes y después se aplica el teorema:

$$\frac{-27m^7}{-3m^3} = \frac{-27}{-3}m^{7-3} = 9m^4$$

$\boldsymbol{a^0 = 1}$

Demostración

Al aplicar el teorema de división, con $m = n$, resulta que:

$$1 = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\left(-12m^7\right)^0$?

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(-12m^7\right)^0 = 1$$

$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Demostración

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $(-3x)^{-2}$?

Solución

Se aplica el teorema y después se desarrolla la potencia:

$$(-3x)^{-2} = \frac{1}{(-3x)^2} = \frac{1}{(-3x)(-3x)} = \frac{1}{9x^2}$$

Por tanto, se tiene que: $(-3x)^{-2} = \frac{1}{9x^2}$

- $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Demostración

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n)(a^n)(a^n)...(a^n)}_{m \text{ veces}} = a^{n+n+n+...+n} = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo

¿Cuál es una expresión equivalente a $(m^4)^3$?

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$(m^4)^3 = m^{(4)(3)} = m^{12}$$

- $\boldsymbol{(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n}$

Demostración

Al aplicar el teorema de multiplicación, con $m = n$, entonces se obtiene:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = \underbrace{(a \cdot b \cdot c)(a \cdot b \cdot c)...(a \cdot b \cdot c)}_{n \text{ veces}} = (a \cdot a \cdot ... \cdot a)(b \cdot b \cdot ... \cdot b)(c \cdot c \cdot ... \cdot c) = a^n b^n c^n$$

Ejemplo

Determina una expresión equivalente a: $(x^3 \cdot y^4 \cdot z^2)^4$.

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene que: $(x^3 \cdot y^4 \cdot z^2)^4 = x^{(3)(4)} y^{(4)(4)} z^{(2)(4)} = x^{12} \cdot y^{16} \cdot z^8$

- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}^{n \text{ veces}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{m^4 \cdot n^3}{r^2}\right)^5$?

Solución

Aplica el teorema, y determina que:

$$\left(\frac{m^4\cdot n^3}{r^2}\right)^5=\frac{\left(m^4\cdot n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{\left(m^4\right)^5\cdot\left(n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{m^{20}\cdot n^{15}}{r^{10}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene que:

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\left(\frac{3y}{2x}\right)^2$$

Luego, al elevar al cuadrado se tiene el desarrollo:

$$\left(\frac{3y}{2x}\right)^2=\frac{(3y)^2}{(2x)^2}=\frac{9y^2}{4x^2}$$

Por tanto, $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\frac{9y^2}{4x^2}$

EJERCICIO 93

Aplica la definición y desarrolla las siguientes potencias:

1. $\left(3x^2\right)^3$
2. $(-4xy)^2$
3. $\left(\frac{2}{5}a^4\right)^4$
4. $\left(-6x^2y^3\right)^3$
5. $-\left(2a^6\right)^5$
6. $\left(\frac{7}{4}m^{-2}\right)^2$
7. $\left(\frac{6a}{3b}\right)^5$
8. $\left[-(2ax)^2\right]^2$

Simplifica las siguientes expresiones y muestra el resultado sin exponentes negativos:

9. $(3y)\left(-5y^2\right)$
10. $x^3y^4x^{-2}y^3$
11. $x^{\frac{4}{5}}x^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{3}{5}}$
12. $\left(-m^3n^{-1}\right)\left(m^{-2}n^2\right)$
13. $\frac{a^5}{a^{-3}}$
14. $\frac{9m^{-4}}{m^2}$
15. $\frac{3a^5b^{-7}}{a^3b^{-6}}$
16. $\frac{m^3n^{-5}}{m^{-2}n^{-2}}$
17. $\frac{3a^{-2}b^2}{17a^2b^3}$
18. $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)^6$
19. $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)^5$
20. $(-2x)^4$

21. $-9x^0$
22. $2(x-5y)^0$
23. $5x^{-3}$
24. $-(6x)^{-2}$
25. $(a^{-3}b^2)^{-1}$
26. $(b\cdot b^2\cdot b^3)^{-2}$
27. $(z^{-2}\cdot z^3\cdot z^0)^{-3}$
28. $\left[(x+2y)^{-3}\right]^{-2}$
29. $(2a^3)^2(3a)^3$
30. $\left(\frac{4}{3}x^2y^3\right)^3\left(\frac{3}{16x^5}\right)^2$
31. $\frac{(4x^3)^2}{(-2x^5)^3}$
32. $\frac{(-a^4b^5)^4}{(a^8b^{10})^2}$
33. $\frac{(ab)^2(a^2b^2)^3}{(a^3b^3)^2}$
34. $\frac{(6a^4)^5}{(2a^2)^2(3a)^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Se aplican los teoremas de los exponentes, según se presenten en la expresión; esto significa que el orden en que se realicen estará determinado por las operaciones correspondientes, así como por los signos de agrupación que estén involucrados.

EJEMPLOS

1 Simplifica la siguiente expresión y da el resultado con exponentes positivos.

$$(x^2y^{-2})^{-3}$$

Solución

Se aplica el teorema $(a\cdot b)^n = a^n\, b^n$ y posteriormente se realiza el producto de los exponentes.

$$(x^2y^{-2})^{-3} = (x^2)^{-3}(y^{-2})^{-3} = x^{-6}y^6$$

El elemento con exponente negativo se transforma a potencia positiva y se realiza la multiplicación de fracciones.

$$x^{-6}y^6 = \frac{1}{x^6}\cdot y^6 = \frac{y^6}{x^6}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{y^6}{x^6}$

2 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Solución

En esta expresión la base involucrada es el binomio $x^2 + 1$, por lo que se trabaja únicamente con los exponentes, se simplifica el numerador y después se simplifica la división como sigue:

$$\frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{-1}$$

Al eliminar el exponente negativo la expresión resultante es:

$$\left(x^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{1}{x^2+1}$

3 Simplifica la siguiente expresión:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2}$$

Solución

Se realiza la división dentro del paréntesis:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2} = \left(2x^{3-(-1)}y^{-2-4}z^{4-3}\right)^{-2} = \left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2}$$

Se eleva cada uno de los factores al exponente "– 2", aquellos que resulten con exponente negativo se transforman a su expresión equivalente con exponente positivo hasta obtener la simplificación deseada.

$$\left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2} = 2^{-2}x^{-8}y^{12}z^{-2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x^8}\cdot y^{12}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{y^{12}}{4x^8z^2}$$

4 Simplifica al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5}$$

Solución

Se resuelven las potencias para cada uno de los paréntesis:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5} = \frac{2^6m^{\frac{6}{3}}n^{\frac{30}{6}}}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)}$$

Se multiplican los factores del denominador y por último se realiza la división:

$$\frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{2^{-1+5}m^{2+5}n^{-6+5}} = \frac{2^6m^2n^5}{2^4m^7n^{-1}} = 2^{6-4}m^{2-7}n^{5-(-1)} = 2^2m^{-5}n^6$$

El resultado contiene exponentes negativos, entonces se convierte a exponente positivo para obtener la simplificación final:

$$2^2m^{-5}n^6 = 2^2\cdot\frac{1}{m^5}\cdot n^6 = \frac{4n^6}{m^5}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{4n^6}{m^5}$

5 Simplifica la siguiente expresión al máximo y que no contenga exponentes negativos.

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}$$

Solución

Se desarrollan los paréntesis internos al elevar cada uno de los factores al exponente correspondiente:

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}=\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}$$

Se resuelve el producto en el numerador de la fracción y se realiza la división:

$$\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{5}{6}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(x^{-\frac{5}{6}-2}y^{\frac{5}{6}-3}z^{1-1}\right)^{3}$$

$$=\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}z^{0}\right)^{3}$$

Se eleva cada uno de los factores a la potencia 3:

$$\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}\right)^{3}=x^{\left(-\frac{17}{6}\right)(3)}y^{\left(-\frac{13}{6}\right)(3)}=x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}$$

Los exponentes resultantes son negativos, por lo que se transforman a otro factor equivalente con exponente positivo

$$x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}}\cdot\frac{1}{y^{\frac{13}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\dfrac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$

6 Reduce a su mínima expresión:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[(bc)^{7}\right]^{0}}{(abc)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

Solución

Se desarrollan los paréntesis internos:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[(bc)^{7}\right]^{0}}{(abc)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}=\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

Luego, si una fracción está elevada a un exponente negativo, ésta es igual a su recíproco elevado al exponente positivo, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ entonces:

$$\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} = \left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right)$$

La expresión resultante se simplifica de diversas formas, una de ellas es multiplicar las fracciones y por último realizar la división resultante:

$$\left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right) = \frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3+\frac{1}{3}}}{a^{-8+\frac{3}{2}}b^{-14+1}} = \frac{a^{-3}b^{-3}c^{-\frac{8}{3}}}{a^{-\frac{13}{2}}b^{-13}} = a^{-3+\frac{13}{2}}b^{-3+13}c^{-\frac{8}{3}} = a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}}$$

El factor con exponente negativo se transforma en otro equivalente de exponente positivo:

$$a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}} = a^{\frac{7}{2}}b^{10}\cdot\frac{1}{c^{\frac{8}{3}}} = \frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$

7 Reduce a su mínima expresión:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}}$$

Solución

Se transforman cada uno de los sumandos a exponente positivo y se simplifica la fracción compleja resultante:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1+x}{x^3}}{\frac{1+x}{x^2}} = \frac{x^2(1+x)}{x^3(1+x)} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{1}{x}$

8 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$$

Solución

Cada uno de los sumandos con exponente negativo se expresa en otro equivalente con exponente positivo:

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

(continúa)

(*continuación*)

Las transformaciones dan como resultado una fracción compleja, la cual al simplificarla se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{ab\left(b^2-a^2\right)}{a^2b^2\left(b+a\right)}=\frac{ab(b+a)(b-a)}{a^2b^2\left(b+a\right)}=\frac{b-a}{ab}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{b-a}{ab}$

EJERCICIO 94

Aplica los teoremas de los exponentes y simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1. $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{12}$
2. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{6}{4}}$
3. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{6}}}$
4. $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-1}z^{-2}}{2x^{-3}y^{-1}}\right)^{2}$
5. $\left(\dfrac{-3x^{4}y^{2}}{-6x^{6}y^{-2}}\right)^{-1}$
6. $\dfrac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{2}}}$
7. $\dfrac{\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}}{\left(6x^{-2}y^{-1}\right)^{-1}}$
8. $\dfrac{4a^{5}b^{-4}}{\left(2a^{-2}b^{3}\right)^{-2}}$
9. $\left(\dfrac{8x^{3}y^{-2}z^{4}}{4x^{-2}y^{4}z^{-3}}\right)^{-2}$
10. $\dfrac{(x-3)^{-2}(x-3)^{5}}{(x-3)^{3}}$
11. $\dfrac{(x+3y)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+3y)^{-\frac{2}{3}}}{(x+3y)^{-\frac{4}{3}}}$
12. $\left[\dfrac{\left(x^{3}y^{-2}\right)^{-1}}{\left(2x^{2}y^{-3}\right)^{-2}}\right]^{-3}$
13. $\left(\dfrac{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}\right)^{-2}$
14. $\dfrac{\left(5x^{2}y^{-2}\right)^{-2}\cdot\left(5x^{-3}y^{2}\right)^{2}}{\left(x^{3}y^{-2}\right)^{-1}}$
15. $\left[\dfrac{\left(x^{2}y^{-\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{4}}{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}\right]^{-1}$
16. $\dfrac{\left(a^{4}b^{-2}c^{6}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{6}}\right)^{6}}$
17. $\dfrac{1}{\left(3a^{2}b^{3}\right)^{-2}}\cdot\left(2ab^{-2}\right)^{-3}$
18. $\dfrac{\left(m^{8}n^{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(m^{9}n^{6}\right)^{\frac{1}{3}}}$
19. $\left[\left(4x^{2}y^{3}\right)^{-2}\cdot\left(2x^{2}y^{-2}\right)^{2}\right]^{-2}$
20. $\dfrac{\left[\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}+y^{2}\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^{4}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{-2}}$
21. $\left[\dfrac{(x-2y)^{-2}\cdot(x-2y)^{-5}}{(x-2y)^{-6}}\right]^{-2}$
22. $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}}$
23. $\dfrac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$
24. $\left(\dfrac{y^{0}-y^{-2}}{x^{0}-y^{-1}}\right)^{-1}$
25. $\left(x^{-2}+y^{-3}\right)\left(x^{-2}-y^{-3}\right)$
26. $\dfrac{x^{2}y^{2}\left(y^{-2}-x^{-2}\right)}{x-y}$
27. $\dfrac{xy^{-2}+x^{-2}y}{x^{-1}+y^{-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencia de un binomio

Factorial de un número

A la expresión $r!$ se le denomina "factorial de r" y se define como el producto de todos los números naturales anteriores a r.

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{con } r > 0$$

Si $r = 0$, entonces $0! = 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de: 4!

Solución

Al aplicar la definición, se obtiene que:

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

Por tanto, $4! = 24$

2 Determina el resultado de 6!

Solución

Se desarrolla cada uno de los factoriales y se realiza la operación resultante:

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

Por consiguiente, $6! = 720$

Binomio de Newton

Para un número n el desarrollo de:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

El procedimiento anterior se llama *teorema del binomio de Newton* o fórmula para el binomio de Newton.

Si n es natural, el desarrollo de $(a + b)^n$ cumple con las siguientes características:

a) El primer término es a^n y el último término es b^n.

b) Al desarrollar el binomio se obtienen $(n + 1)$ términos.

c) Conforme aumentan los términos, la potencia del primer término a disminuye en 1 y la del segundo término b aumenta en 1.

d) Para obtener el i-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x + 2y)^4$.

Solución

Se aplica el desarrollo del binomio de Newton, hasta obtener el segundo término elevado al exponente 4:

$$(x+2y)^4 = (x)^4 + 4(x)^{4-1}(2y)^1 + \frac{4(4-1)}{2!}(x)^{4-2}(2y)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(x)^{4-3}(2y)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(x)^{4-4}(2y)^4$$

Se desarrollan los factoriales en los denominadores de cada fracción, se desarrollan las potencias y se simplifica al máximo cada uno de los sumandos:

$$= (x)^4 + 4(x)^3(2y)^1 + \frac{4(3)}{2\cdot 1}(x)^2(2y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^1(2y)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^0(2y)^4$$

$$= x^4 + 4(x^3)(2y) + 6(x^2)(4y^2) + 4(x)(8y^3) + (x^0)(16y^4)$$

Finalmente, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

2 Desarrolla: $(2x^2 - 3y^2)^5$.

Solución

Se aplica el teorema del binomio de Newton y se tiene que:

$$(2x^2-3y^2)^5 = (2x^2)^5 + 5(2x^2)^{5-1}(-3y^2)^1 + \frac{5(5-1)}{2!}(2x^2)^{5-2}(-3y^2)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x^2)^{5-3}(-3y^2)^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x^2)^{5-4}(-3y^2)^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x^2)^{5-5}(-3y^2)^5$$

Se simplifican las fracciones y se desarrollan las potencias:

$$= (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(-3y^2)^1 + \frac{5(4)}{2\cdot 1}(2x^2)^3(-3y^2)^2 + \frac{5(4)(3)}{3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^2(-3y^2)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^1(-3y^2)^4 + \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^0(-3y^2)^5$$

$$= 32x^{10} + 5(16x^8)(-3y^2) + 10(8x^6)(9y^4) + 10(4x^4)(-27y^6) + 5(2x^2)(81y^8) + (2x^2)^0(-243y^{10})$$

Por último, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$= 32x^{10} - 240x^8y^2 + 720x^6y^4 - 1\,080x^4y^6 + 810x^2y^8 - 243y^{10}$$

Si n es entero negativo o fraccionario, el desarrollo de $(a+b)^n$ cumple con las siguientes características:

a) El primer término es a^n y no existe un último término.

b) El número de términos es infinito.

c) El desarrollo de estos binomios recibe el nombre de series.

d) Conforme aumentan los términos la potencia del primer término a disminuye en 1, y la del segundo término b, aumenta en 1.

e) Para obtener el i-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x+1)^{-3}$.

Solución

Se aplica el desarrollo de Newton hasta obtener los términos deseados, en este caso se desarrolla hasta cinco términos

$$(x+1)^{-3} = (x)^{-3} + (-3)(x)^{-3-1}(1) + \frac{(-3)(-3-1)}{2!}(x)^{-3-2}(1)^2 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}(x)^{-3-3}(1)^3 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{4!}(x)^{-3-4}(1)^4 + ...$$

Se simplifican todos y cada uno de los coeficientes de cada término, así como los exponentes:

$$= (x)^{-3} + (-3)(x)^{-4}(1) + \frac{(-3)(-4)}{2\cdot 1}(x)^{-5}(1)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-6}(1)^3 + \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-7}(1)^4 - \ldots$$

$$= x^{-3} - 3(x^{-4})(1) + 6(x^{-5})(1) - 10(x^{-6})(1) + 15(x^{-7})(1) - \ldots$$

$$= x^{-3} - 3x^{-4} + 6x^{-5} - 10x^{-6} + 15x^{-7} - \ldots$$

Como los exponentes son negativos, éstos se expresan en su equivalente positivo, lo que resulta en:

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5} - \frac{10}{x^6} + \frac{15}{x^7} - ...$$

2 Desarrolla: $(x+2)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

Al aplicar el teorema de Newton hasta cinco términos:

$$(x+2)^{\frac{1}{2}} = (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2\,!}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + ...$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se simplifica cada uno de los sumandos al máximo:

$$= (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + \ldots$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(2) - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}(4) + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}(8) - \frac{5}{128}\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)(16) + \ldots$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{8}x^{-\frac{7}{2}} + \ldots$$

Por último, se convierten los exponentes negativos a positivos y se obtiene el desarrollo:

$$= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{8x^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

EJERCICIO 95

Desarrolla los siguientes binomios:

1. $(3-2x)^3$
2. $(1+x)^4$
3. $(x-2y)^3$
4. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^3$
5. $(x-1)^6$
6. $(2-x)^4$
7. $(x^2+y^2)^5$
8. $\left(\frac{x}{2}-1\right)^5$
9. $\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)^4$
10. $(x^3+5y^3)^3$
11. $(x^2-1)^{-1}$
12. $(2x-1)^{-3}$
13. $(x-1)^{-4}$
14. $(3x+1)^{\frac{1}{3}}$
15. $(x+2)^{\frac{4}{3}}$
16. $(x-2)^{-\frac{3}{4}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo del *i-ésimo* término

Para determinar el *i-ésimo* término del binomio $(a+b)^n$, se utiliza la siguiente fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

1 Calcula el cuarto término de $(2x+3)^5$.

Solución

En este caso $i = 4$, por tanto, en el numerador sólo habrá tres factores numéricos:

$$4\text{o. término} = \frac{5(5-1)(5-2)}{(4-1)!}(2x)^{5-4+1}(3)^{4-1} = \frac{5(4)(3)}{3(2)(1)}(2x)^2(3)^3 = 10(4x^2)(27) = 1\,080x^2$$

Entonces, el cuarto término del binomio $(2x+3)^5$ es: $1\,080x^2$

2 Determina el sexto término de $(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

Para encontrar el sexto término se toma en cuenta que $i = 6$ y, por tanto, sólo se tienen cinco términos en el numerador, luego:

$$\text{Sexto término} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)}{(6-1)\,!}(x)^{\frac{1}{2}-6+1}(1)^{6-1} = \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}(1)^5 = \frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$$

Por tanto, el sexto término del binomio $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ es: $\frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$

EJERCICIO 96

Determina el término que se indica en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Tercer término de $(3x+5)^7$
2. Quinto término de $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^8$
3. Cuarto término de $(4xy-7)^6$
4. Sexto término de $(8x+1)^{\frac{1}{3}}$
5. Octavo término de $(3x-5)^{10}$
6. Sexto término de $(x-2)^{-4}$
7. Quinto término de $(x-1)^{-1}$
8. Cuarto término de $(4x+9)^{\frac{1}{2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Triángulo de Pascal

Al desarrollar el binomio $(a + b)^n$, los elementos tienen como coeficientes:

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2!}\ \ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ \text{etcétera.}$$

Específicamente:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y así sucesivamente.

El *triángulo de Pascal* se forma con los coeficientes de los elementos al elevar un binomio a una potencia n con $n \in Z^+$. Entonces se toman los coeficientes de los términos:

$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
⋮	⋮

Ahora bien, los extremos de cada potencia siempre son la unidad y los siguientes números de cada potencia se obtienen al sumar dos a dos los dígitos que se tienen en el renglón inmediato superior.

EJEMPLOS

1 Halla los coeficientes de $(a+b)^5$.

Solución

A este binomio le antecede $(a+b)^4$, cuyos coeficientes son:

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

luego se coloca la unidad a los extremos y se suman dos a dos de la siguiente forma:

1 $1+4$ $4+6$ $6+4$ $4+1$ 1

Finalmente, los coeficientes son:

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

2 Desarrolla el siguiente binomio $(3x-2y)^4$.

Solución

Al tomar los números del triángulo en la fila de un binomio con potencia 4, se tiene:

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= \mathbf{1}(3x)^4+\mathbf{4}(3x)^3(-2y)+\mathbf{6}(3x)^2(-2y)^2+\mathbf{4}(3x)(-2y)^3+\mathbf{1}(-2y)^4\\ &= (81x^4)+4(27x^3)(-2y)+6(9x^2)(4y^2)+4(3x)(-8y^3)+(16y^4)\\ &= 81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4\end{aligned}$$

3 Desarrolla el siguiente binomio $(x^2+2y)^6$.

Solución

Se utilizan los coeficientes para la potencia 6 y se obtiene:

$$\begin{aligned}(x^2+2y)^6 &=\\ &= \mathbf{1}(x^2)^6+\mathbf{6}(x^2)^5(2y)+\mathbf{15}(x^2)^4(2y)^2+\mathbf{20}(x^2)^3(2y)^3+\mathbf{15}(x^2)^2(2y)^4+\mathbf{6}(x^2)(2y)^5+\mathbf{1}(2y)^6\\ &= (x^{12})+6(x^{10})(2y)+15(x^8)(4y^2)+20(x^6)(8y^3)+15(x^4)(16y^4)+6(x^2)(32y^5)+(64y^6)\\ &= x^{12}+12x^{10}y+60x^8y^2+160x^6y^3+240x^4y^4+192x^2y^5+64y^6\end{aligned}$$

EJERCICIO 97

Desarrolla los siguientes binomios con el triángulo de Pascal:

1. $(2x+1)^4$
2. $(3-2y)^7$
3. $(x+1)^8$
4. $(1-x)^6$
5. $(5m-2n)^5$
6. $(a+2b)^8$
7. $(x^2+5y)^6$
8. $\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)^7$
9. $(x+y-2)^3$
10. $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^5$
11. $(x-1)^{12}$
12. $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\right)^5$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 10
RADICACIÓN

Reseña HISTÓRICA

El signo radical

Christoph Rudolff (1500-1545), alemán, publica en 1525 el primer tratado de álgebra en alemán vulgar titulado *Coss*. En esta obra aparece, por primera vez, el símbolo Ö, para indicar la raíz cuadrada. La raíz cuadrada de un número se designaba antes del siglo XVI con un punto delante del número.

En el siglo XVIII Leonhard Euler utilizó por primera vez nuestro actual símbolo de raíz, originado de la deformación de la letra "**r**", la primera letra de la palabra *radix* con la que se designaba a la raíz cuadrada.

Leonhard Euler (1707-1783)

Radical

La expresión $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de radical y se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Elementos de un radical

Un radical es una expresión algebraica, que se forma con los siguientes elementos:

coeficiente, radicando e índice de raíz

Ejemplos

	Coeficiente	Radicando	Índice de raíz
$2\sqrt{3}$	2	3	2
$\sqrt[3]{2xy}$	1	$2xy$	3
$5x\sqrt[4]{3x^2y}$	$5x$	$3x^2y$	4

Raíz principal de un radical

Sea a un número real y n entero positivo mayor a 1:

- **Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$**
- **Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ tal que $b^n = a$**

Ejemplos

$\sqrt{25} = \pm 5$ porque $(5)^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

- **Si $a < 0$ y n impar, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ con $b < 0$**

Ejemplo

$\sqrt[5]{-1\,024} = -4$ porque $(-4)^5 = -1\,024$.

- **Si $a < 0$ y n par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es número real.**

Ejemplo

$\sqrt{-9}$ no es un número real, ya que no existe un número x, tal que: $x^2 = -9$.

Radical como exponente

Sea $\sqrt[n]{a}$ un número real, entonces este radical se expresa como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Teoremas

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Demostración

Se expresa el radical $\sqrt[n]{a}$ como exponente, se eleva la expresión y se obtiene:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Por consiguiente, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Ejemplo

Obtén el resultado de $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ **si** $a < 0$ **y** n **es impar**

Ejemplo

Determina el resultado de $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ **si** $a < 0$ **y** n **es par**

Ejemplo

Obtén la siguiente raíz: $\sqrt[4]{(-81)^4}$.

Solución

Se aplica el teorema y el resultado es:

$$\sqrt[4]{(-81)^4} = |-81| = 81$$

- **Sea el radical** $\sqrt[n]{a^m}$ **la expresión equivalente es** $a^{\frac{m}{n}}$**, donde el índice es el denominador de la fracción y el exponente del radicando el numerador.**

Demostración

El radical se expresa como exponente fraccionario y se multiplican los exponentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $\sqrt[5]{x^4}$ con exponente fraccionario.

Solución

Al dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz resulta:

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

2 Expresa $\sqrt{m}$ con exponente fraccionario.

Solución

En este caso se trata de una raíz cuadrada y el exponente de la base es 1, por tanto, el índice es 2, entonces:

$$\sqrt{m} = \sqrt[2]{m^1} = m^{\frac{1}{2}}$$

3 Expresa el radical $\sqrt[5]{(a+b)^3}$ con exponente fraccionario.

Solución

Se divide el exponente por el índice y resulta:

$$\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}}$$

4 Expresa el radical $\sqrt[3]{x^4+y^4}$ con exponente fraccionario.

Solución

El radicando es un polinomio que se toma como un solo elemento, esto es:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{(x^4+y^4)^1}$$

Se aplica la división del exponente entre el índice y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{(x^4+y^4)^1}=(x^4+y^4)^{\frac{1}{3}}$$

EJERCICIO 98

Representa en forma de exponente fraccionario los siguientes radicales:

1. $\sqrt{m^5}$
2. $\sqrt[7]{x^2}$
3. $\sqrt[3]{y^4}$
4. $\sqrt[5]{a^2}$
5. $\sqrt{b^{11}}$
6. $\sqrt{5x}$
7. $\sqrt[6]{(2x)^5}$
8. $\sqrt[4]{(3y^2)^3}$
9. $\sqrt{(2xy)^9}$
10. $\sqrt[9]{(x^2y)^2}$
11. $\sqrt[8]{x^4y^4}$
12. $\sqrt[3]{x^6+y^6}$
13. $\sqrt{x^7-y^7}$
14. $\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}$
15. $\sqrt[5]{(x+2y)^{11}}$
16. $\sqrt[5]{a^9}-\sqrt[7]{b^3}$
17. $\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^5}$
18. $\sqrt[4]{m^7}\sqrt[5]{n^3}$
19. $\sqrt{m(n+p)^3}$
20. $\sqrt[3]{a^2m^{13}}\sqrt[4]{n^7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Representación de un exponente fraccionario como radical

Dada la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ su representación como un radical es: $\sqrt[n]{a^m}$, donde el numerador es el exponente del radical y el denominador el índice de la raíz.

EJEMPLOS

1 Expresa en forma de radical: $y^{\frac{1}{3}}$.

Solución

El exponente del radicando es la unidad y el índice de la raíz es 3, por tanto:

$$y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{y^1}=\sqrt[3]{y}$$

2 Escribe como radical: $4(m+n)^{\frac{2}{5}}$.

Solución

El exponente del radicando es 2 y el índice de la raíz es 5, el coeficiente 4 permanece igual, por lo que resulta:

$$4(m+n)^{\frac{2}{5}} = 4\sqrt[5]{(m+n)^2}$$

3 Transforma a radical la siguiente expresión: $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$.

Solución

Se transforma a radical cada uno de los sumandos y se obtiene:

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

EJERCICIO 99

Representa en forma de radical.

1. $2^{\frac{1}{3}}$
2. $5^{\frac{4}{7}}$
3. $m^{\frac{2}{3}}$
4. $(3y)^{\frac{11}{2}}$
5. $(2xy^2)^{\frac{3}{4}}$
6. $(x^3y)^{\frac{1}{2}}$
7. $7y^{\frac{2}{5}}$
8. $3a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{8}{7}}$
9. $\frac{3}{4}z^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}$
10. $m^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{1}{3}}$
11. $a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}}$
12. $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{4}}$
13. $(2x+y)^{\frac{4}{5}}$
14. $(m+n)^{\frac{1}{2}}$
15. $(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$
16. $(m^{-1}-n^{-2})^{\frac{3}{7}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a los radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema correspondiente de exponentes para obtener:

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Ejemplo

Realiza: $\sqrt[3]{2x^2y}$.

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\sqrt[3]{2x^2y} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, para demostrar que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

Efectúa: $\sqrt{\frac{5a}{3}}$.

Solución

Se aplica el teorema para la división y después el del producto para obtener como resultado:

$$\sqrt{\frac{5a}{3}}=\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Demostración

Al aplicar los teoremas de los exponentes, se demuestra que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Ejemplo

Desarrolla: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}$.

Solución

Con los respectivos teoremas se determina que:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}=\sqrt[(3)(4)]{3x}=\sqrt[12]{3x}=\sqrt[12]{3}\,\sqrt[12]{x}$$

Cálculo de raíces

Para obtener raíces de cantidades numéricas o expresiones algebraicas, se aplica la fórmula como se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

1 Obtén: $\sqrt{16}$.

Solución

Se descompone el radicando en sus factores primos y se aplica la fórmula anterior para obtener como resultado:

$$\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=2^{\frac{4}{2}}=2^2=4$$

2 Obtén el resultado de: $\sqrt[5]{-243}$.

Solución

Se expresa el radicando de la siguiente manera:

$$-243=(-3)^5$$

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=(-3)^{\frac{5}{5}}=-3$$

3 Determina la raíz de: $\sqrt[3]{64x^3}$.

Solución

Se expresa cada uno de los elementos del radicando de la siguiente manera:

$$64x^3=2^6x^3$$

Se aplica el respectivo teorema de radicales para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{64x^3}=\sqrt[3]{2^6x^3}=\sqrt[3]{2^6}\sqrt[3]{x^3}=2^{\frac{6}{3}}x^{\frac{3}{3}}=2^2x=4x$$

4 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt[5]{\dfrac{32x^5}{243y^{10}}}$.

Solución

Se descomponen los coeficientes en factores primos y se aplican los respectivos teoremas para obtener:

$$\sqrt[5]{\frac{32x^5}{243y^{10}}}=\sqrt[5]{\frac{2^5x^5}{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5x^5}}{\sqrt[5]{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{x^5}}{\sqrt[5]{3^5}\sqrt[5]{y^{10}}}=\frac{2^{\frac{5}{5}}x^{\frac{5}{5}}}{3^{\frac{5}{5}}y^{\frac{10}{5}}}=\frac{2x}{3y^2}$$

5 Encuentra el resultado de: $\dfrac{3x}{5y^2}\sqrt{\dfrac{25y^4}{81x^2}}$.

Solución

Se aplica el teorema de la división y se extrae la raíz:

$$\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{25y^4}{81x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{5^2y^4}{3^4x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5^{\frac{2}{2}}y^{\frac{4}{2}}}{3^{\frac{4}{2}}x^{\frac{2}{2}}}\right)=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5y^2}{3^2x}\right)$$

Se multiplican las expresiones y se simplifica el resultado para finalmente obtener:

$$=\frac{15xy^2}{45xy^2}=\frac{1}{3}$$

6 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{(1-3x)^6}$?

Solución

Se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{(1-3x)^6}=(1-3x)^{\frac{6}{3}}=(1-3x)^2$$

7 Obtén el resultado de $\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}$.

Solución

Se factoriza la expresión:

$$1-8x^2y^2+16x^4y^4=\left(1-4x^2y^2\right)^2$$

Se aplica la fórmula para extraer la raíz:

$$\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}=\sqrt{\left(1-4x^2y^2\right)^2}=\left(1-4x^2y^2\right)^{\frac{2}{2}}=\left|1-4x^2y^2\right|$$

Por tanto, la raíz de la expresión es: $\left|1-4x^2y^2\right|$

EJERCICIO 100

Determina las siguientes raíces:

1. $\sqrt{729}$
2. $\sqrt[3]{8}$
3. $\sqrt[4]{81}$
4. $\sqrt{196}$
5. $\sqrt[4]{256}$
6. $\sqrt{\frac{81}{16}}$
7. $\sqrt[3]{216}$
8. $4\sqrt[5]{-32}$
9. $\sqrt[3]{-64}$
10. $\sqrt{4x^2y^4}$
11. $\sqrt[3]{27m^6n^9}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{216x^{12}}$
13. $xy^2\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$
14. $m^4n^3\sqrt[5]{\frac{32}{m^5n^{10}}}$
15. $\frac{y^{2n}}{x^m}\sqrt{\frac{25x^{2m}}{y^{8n}}}$
16. $\sqrt{25m^{4-2x}n^{8y-6}}$
17. $\frac{2}{x}\sqrt[3]{\left(x+x^2\right)^3}$
18. $\frac{\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}$
19. $\frac{3x}{2x-10y}\sqrt{x^2-10xy+25y^2}$
20. $\sqrt{\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2y^2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m \geq n$, se puede simplificar expresando a^m como un producto de bases donde el exponente de una de ellas es múltiplo de n.

EJEMPLOS

1 Simplifica el siguiente radical: $\sqrt[3]{x^{13}}$.

Solución

El radicando se descompone en factores, de la siguiente manera:

$$x^{13}=x^{12}x$$

Se aplica el teorema de radicales para el producto y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^{13}}=\sqrt[3]{x^{12}x}=\sqrt[3]{x^{12}}\;\sqrt[3]{x}=x^{\frac{12}{3}}\sqrt[3]{x}=x^4\sqrt[3]{x}$$

2 Reduce la siguiente expresión: $\sqrt{72x^3y^4z^5}$.

Solución

El coeficiente 72 se descompone en sus factores primos y las bases se expresan como:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad x^3 = x^2x \qquad z^5 = z^4z$$

Se aplican los teoremas correspondientes y el radical se simplifica como sigue:

$$\sqrt{72x^3y^4z^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 x^2xy^4z^4z} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} x^{\frac{2}{2}} y^{\frac{4}{2}} z^{\frac{4}{2}} \sqrt{2xz} = 6xy^2z^2\sqrt{2xz}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $6xy^2z^2\sqrt{2xz}$

3 Simplifica: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z}$.

Solución

Se descompone 128 en factores primos y la base y se expresa de esta manera:

$$128 = 2^7 = 2^6 \cdot 2 \qquad y^5 = y^3y^2$$

Se procede a simplificar la expresión:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6 \cdot 2x^6y^3y^2z} = \frac{1}{2}\left(2^{\frac{6}{3}}x^{\frac{6}{3}}y^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{2y^2z}\right) = \frac{1}{2}\left(2^2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}\right) = 2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$$

Finalmente, el resultado es: $2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$

4 Simplifica la expresión: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}}$.

Solución

Se descompone cada uno de los elementos que conforman el radicando y se simplifica para obtener como resultado:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^3a^3ab^6c^6c}{2^3x^3x}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{6}{3}}}{2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{3}{3}}}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3ab^2c^2}{2x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right)$$

$$= \frac{ab^2c^2}{x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}$$

EJERCICIO 101

Simplifica los siguientes radicales:

1. $\sqrt{x^3}$
2. $\sqrt{27x^2y^7}$
3. $\sqrt{64m^3n^2z^4}$
4. $\sqrt[3]{27m^5n^{15}}$
5. $\sqrt[3]{x^5y^4z^6}$
6. $\sqrt[4]{625x^5y^8}$
7. $3\sqrt{50a^4b^3}$
8. $5\sqrt{9p^4q^7}$
9. $2\sqrt[4]{243x^5y^4z}$
10. $5\sqrt[4]{80a^3b^7c^4}$
11. $2\sqrt[5]{729m^8n^{12}}$
12. $2x\sqrt[3]{x^4y^5z^9}$

13. $-3m\sqrt[4]{128m^9n^{14}}$

14. $\frac{1}{3}\sqrt{18a^5}$

15. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{32a^6b^4}$

16. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{160m^4n^9p^2}$

17. $\frac{1}{3x}\sqrt[3]{27x^6y^4}$

18. $\frac{2}{3x^2y}\sqrt[4]{81x^5y^4}$

19. $\sqrt{\frac{18x^3}{2y^2}}$

20. $\sqrt[3]{\frac{16a^4b^6}{3m^5}}$

21. $\sqrt[4]{\frac{x^7y^5}{16z^{12}}}$

22. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2a^5b^3}{27cd^7}}$

23. $\frac{3x}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{48x^4}}$

24. $\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{80y^4}{81x^6}}$

25. $\sqrt{9m^3-18m^2n}$

26. $\sqrt{16x^5+40x^3y^3+25xy^6}$

27. $\sqrt[3]{27a^7b^3-54a^4b^4}$

28. $\sqrt[4]{(m^2-2mn+n^2)^3}$

29. $\sqrt[5]{243(x+y)^7(x-y)^7}$

30. $\frac{\sqrt{4-4m+m^2}}{\sqrt[3]{(2-m)^5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Introducción de factores

Se escribe el factor o los factores que se desean introducir en el radical, elevados a un exponente igual al índice del radical.

$$a^m\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\left(a^m\right)^n b}$$

EJEMPLOS

1 Introduce el coeficiente del radical $3\sqrt{2}$ a la raíz.

Solución

El coeficiente se introduce en el radical elevado al cuadrado:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{(3)^2\cdot 2}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene:

$$=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$$

Por tanto: $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$

2 Introduce en la raíz $2x\sqrt[3]{y}$ el coeficiente.

Solución

Se coloca dentro del radical el coeficiente $2x$ elevado al exponente 3:

$$2x\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{(2x)^3\cdot y}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza el producto para obtener como resultado:

$$=\sqrt[3]{\left(8x^3\right)\cdot y}=\sqrt[3]{8x^3y}$$

3 Introduce los factores en el radical $2x^2y\sqrt[4]{xy^2}$.

Solución

Se coloca el coeficiente dentro de la raíz con exponente 4:

$$2x^2y\sqrt[4]{xy^2} = \sqrt[4]{\left(2x^2y\right)^4 xy^2}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza la multiplicación:

$$= \sqrt[4]{16x^8y^4xy^2} = \sqrt[4]{16x^9y^6}$$

Por tanto, el resultado es: $\sqrt[4]{16x^9y^6}$

4 Introduce el coeficiente en el radical: $\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$.

Solución

La fracción entra elevada al índice del radical, se realizan las operaciones y se obtiene:

$$\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3a}{b^2}\right)^3\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{27a^3}{b^6}\,\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{54a^3b}{ab^6}} = \sqrt[3]{\frac{54a^2}{b^5}}$$

5 Introduce $3a$ en el radical de la expresión: $\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}}$.

Solución

Se siguen los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene como resultado:

$$\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}} = \sqrt{\frac{(3a)^2}{2a^3x}} = \sqrt{\frac{9a^2}{2a^3x}} = \sqrt{\frac{9}{2ax}}$$

6 Introduce el coeficiente del radical $\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$ a la raíz.

Solución

El coeficiente se introduce y se eleva al cuadrado y la fracción resultante se simplifica:

$$\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}\left(x^2-y^2\right)} = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}} = \sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

EJERCICIO 102

Introduce a la raíz los factores:

1. $3\sqrt{5}$
2. $5\sqrt{7}$
3. $4\sqrt[3]{2}$
4. $\frac{5}{4}\sqrt{2}$
5. $\frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$
6. $x\sqrt{x}$
7. $2x\sqrt[3]{x^2}$
8. $m^3n\sqrt[4]{mn}$
9. $xy^2\sqrt[4]{xy}$
10. $5a^2b^3c\sqrt{2ac}$
11. $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{2a^2}$
12. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{4b}{5a}}$

13. $\frac{3y^2}{4x}\sqrt[4]{\frac{2x^2}{3y}}$

14. $\frac{3ax}{\sqrt{3a}}$

15. $\frac{2x}{\sqrt[3]{2x^2}}$

16. $(2a+b)\sqrt{ab}$

17. $\frac{3a}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a^2}}$

18. $\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

19. $\frac{1}{x-2}\sqrt[3]{x^3-8}$

20. $\frac{2a^2x}{x+a}\sqrt{\frac{x^2+a^2+2ax}{2ax}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Estas operaciones se efectúan si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d}\ +\ b\sqrt[n]{d}\ -\ c\sqrt[n]{d}=(a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

EJEMPLOS

1 Realiza la siguiente operación: $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$.

Solución

Los radicales son semejantes, por tanto, se realiza la operación únicamente con los coeficientes y se obtiene como resultado:

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

2 Simplifica la siguiente operación: $5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}$.

Solución

Los radicales son semejantes, entonces se realiza la operación con los coeficientes y el resultado es:

$$5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}=(5+6-10)\sqrt{3x}=\sqrt{3x}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}$?

Solución

Se agrupan los radicales semejantes:

$$\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Se realiza la reducción:

$$=\left(\frac{2}{3}-1\right)\sqrt[4]{5}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{6}=-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$

4 Reduce la siguiente expresión: $3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y}$.

Solución

Se agrupan los términos semejantes y se simplifican para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y} &= 3y\sqrt{2x}+5y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+7x\sqrt{3y}\\ &=(3y+5y)\sqrt{2x}+(-2x+7x)\sqrt{3y}\\ &=8y\sqrt{2x}+5x\sqrt{3y}\end{aligned}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75}$.

Solución

Los radicales no son semejantes, entonces se efectúan las simplificaciones de cada radical:

$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5} \qquad \sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3} \qquad \sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5} \qquad \sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

Se reemplazan los radicales y se realiza la reducción para obtener:

$$\begin{aligned}3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75} &= 3\left(2\sqrt{5}\right)+4\left(2\sqrt{3}\right)-2\left(3\sqrt{5}\right)-5\sqrt{3}\\ &=6\sqrt{5}+8\sqrt{3}-6\sqrt{5}-5\sqrt{3}=(6-6)\sqrt{5}+(8-5)\sqrt{3}=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

6 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3}$.

Solución

Se simplifica cada uno de los radicales y se realiza la operación, el resultado es:

$$\begin{aligned}\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3} &= \sqrt{3^2\cdot 2x^2y^2y}+x\sqrt{2^4\cdot 2y^2y}-5\sqrt{2x^2y^2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+2^2xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+4xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}=2xy\sqrt{2y}\end{aligned}$$

7 Simplifica $a\sqrt{12ab}+\sqrt{98b^3c}-5\sqrt{3a^3b}-b\sqrt{18bc}+a\sqrt{3ab}$.

Solución

Se simplifica cada uno de los radicales:

$$\begin{aligned}&=a\sqrt{2^2\cdot 3ab}+\sqrt{2\cdot 7^2b^2bc}-5\sqrt{3a^2ab}-b\sqrt{2\cdot 3^2bc}+a\sqrt{3ab}\\ &=a\left(2\sqrt{3ab}\right)+7b\sqrt{2bc}-5\left(a\sqrt{3ab}\right)-b\left(3\sqrt{2bc}\right)+a\sqrt{3ab}\\ &=2a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-5a\sqrt{3ab}-3b\sqrt{2bc}+a\sqrt{3ab}\end{aligned}$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}&=2a\sqrt{3ab}-5a\sqrt{3ab}+a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-3b\sqrt{2bc}\\ &=-2a\sqrt{3ab}+4b\sqrt{2bc}\end{aligned}$$

EJERCICIO 103

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

1. $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
2. $2\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$
3. $4\sqrt{7}-8\sqrt{7}+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}$
4. $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7}$
5. $2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-10\sqrt{3}-\sqrt{2}$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{6}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{2}{3}\sqrt{13}$
7. $\frac{\sqrt{5}}{12}-\frac{3\sqrt{6}}{8}+\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
8. $6\sqrt[3]{m}-10\sqrt[3]{m}$
9. $\frac{4}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{13}{6}\sqrt{x}$
10. $5\sqrt[4]{xy}-2\sqrt[4]{xy}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{xy}$
11. $\sqrt{28}+\sqrt{175}-\sqrt{63}$
12. $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-4\sqrt{2}$
13. $3\sqrt{75}+2\sqrt{12}-4\sqrt{243}$
14. $2\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{20}-\sqrt{8}$
15. $2\sqrt{72}-4\sqrt{18}+5\sqrt{12}-3\sqrt{48}$
16. $2\sqrt{98}-3\sqrt{80}-\sqrt{338}+\sqrt{20}$
17. $3\sqrt{405}-2\sqrt{99}+2\sqrt{500}-4\sqrt{1331}$
18. $\frac{1}{5}\sqrt{450}-\frac{1}{4}\sqrt{800}-\frac{2}{5}\sqrt{320}+\sqrt{80}$
19. $\sqrt{343a^4}+a^2\sqrt{175}-3\sqrt{7a^4}$
20. $a\sqrt{4b}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{25a^2b}$
21. $\sqrt[3]{24x^4}+4x\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{375x^4}$
22. $\sqrt[4]{32x^8}-4x^2\sqrt[4]{512}$
23. $2a\sqrt{xy^2}-3\sqrt{a^2xy^2}+4y\sqrt{a^2x}$
24. $\sqrt{2a^2b^3}+a\sqrt{\frac{243}{4}b^3}+b\sqrt{\frac{50}{36}a^2b}-\sqrt{\frac{75}{16}a^2b^3}$
25. $a^2b\sqrt{c}+\frac{1}{4}a^2\sqrt{b^2c}-\frac{1}{3}b\sqrt{a^4c}+\frac{1}{2}a^2b\sqrt{c}$
26. $\frac{\sqrt[4]{2a^9b^5}}{6}-\frac{b\sqrt[4]{162a^9b}}{4}+a^2\sqrt[4]{\frac{2ab^5}{16}}-\frac{7a^2b\sqrt[4]{2ab}}{8}$
27. $\sqrt{49x^2y}-\sqrt{50x^4y}+x\sqrt{9y}-2x\sqrt{2x^2y}$
28. $\sqrt{x^3y^5}-\sqrt{48x^5y^2}-xy\sqrt{4xy^3}+y\sqrt{27x^5}$
29. $3x\sqrt{2y}+\sqrt{75xy^2}-2\sqrt{2x^2y}-\sqrt{3xy^2}$
30. $2a\sqrt{50b^2c}+5c\sqrt{27a^2b}-3\sqrt{32a^2b^2c}+\sqrt{3a^2bc^2}$
31. $3\sqrt[3]{8x^3y^2}-5\sqrt[3]{4xy^3}-2x\sqrt[3]{64y^2}+y\sqrt[3]{32x}$
32. $15b\sqrt[4]{5a^6b^3}+6a\sqrt[4]{3a^5b^{14}}-5\sqrt[4]{5a^6b^7}-6\sqrt[4]{48a^9b^{14}}$
33. $\frac{1}{3}\sqrt{20a^3}+\frac{1}{6}\sqrt{3ab^3}-\frac{1}{3}a\sqrt{5a}-b\sqrt{\frac{3}{4}ab}$
34. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{y}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4y^5}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^3y}+\frac{2}{3}xy\sqrt[3]{xy^2}$
35. $\frac{5ab}{3}\sqrt{\frac{2a^5}{9b}}+\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{5ab^6}{12}}-a^2b\sqrt{\frac{8a^3}{9b}}+2\sqrt{\frac{5a^3b^6}{48}}$
36. $\sqrt{16a-32}+\sqrt{25a-50}-\sqrt{9a-18}$
37. $\sqrt{x^3+2x^2}+3x\sqrt{x+2}-5\sqrt{x^2(x+2)}$
38 $9\sqrt{x^3y^2-3x^2y^3}-2xy\sqrt{4x-12y}+5x\sqrt{xy^2-3y^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y se simplifica, de ser posible, el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Multiplica y simplifica la siguiente expresión: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$.

Solución

Se multiplican los radicandos y el radical resultante se simplifica, el resultado es:

$$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(8)(2)}=\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}=2^2=4$$

2 Realiza la siguiente multiplicación: $\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}$.

Solución

Se realiza el producto de los términos internos de los radicales y el resultado se simplifica:

$$\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}=\sqrt[3]{\left(9xy^2\right)\left(9x^4y\right)}=\sqrt[3]{81x^5y^3}=\sqrt[3]{3^4x^5y^3}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3x^3x^2y^3}=3xy\sqrt[3]{3x^2}$$

3 Efectúa el siguiente producto: $\frac{xy}{4}\cdot\sqrt{6x^3y^5}\cdot\sqrt{8xy^4}$.

Solución

Se realiza el producto de los radicales y el resultado se multiplica por el coeficiente para obtener como resultado:

$$\frac{xy}{4}\sqrt{6x^3y^5}\sqrt{8xy^4}=\frac{xy}{4}\sqrt{\left(6x^3y^5\right)\left(8xy^4\right)}=\frac{xy}{4}\sqrt{48x^4y^9}=\frac{xy}{4}\left(2^2x^2y^4\sqrt{3y}\right)=x^3y^5\sqrt{3\text{y}}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$.

Solución

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los términos del binomio:

$$\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)=\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$$

$$=\frac{6}{12}x\sqrt{x^2y^4}-\frac{2}{6}y\sqrt{x^3y^2}$$

Se simplifican los radicales y el resultado final es:

$$=\frac{1}{2}x\left(xy^2\right)-\frac{1}{3}y\left(xy\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^2\sqrt{x}$$

EJERCICIO **104**

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
2. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$
3. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}$
4. $\left(3\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{15}\right)$
5. $\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt{xy}$
6. $\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$
7. $\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{x^5}$
8. $\left(2\sqrt{3ab}\right)\left(3\sqrt{6a^3b^2}\right)$
9. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy^2}\right)\left(\sqrt{27x^2y^5}\right)$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a^5}$
11. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{8a^4}$
12. $\left(-4\sqrt[3]{2a^2b^5}\right)\left(2\sqrt[3]{3ab^2}\right)$
13. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a^3}\cdot\sqrt{6a^{-1}}$
14. $\left(2\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x^3}\right)$
15. $\left(-2\sqrt{3ab}\right)\left(\sqrt{6a^2b}\right)\left(\sqrt{a^3b^5}\right)$

16. $\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3a}{x}}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6a^3}{x^3}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$

17. $\sqrt{\frac{3am}{2x}}\sqrt{\frac{8x^3}{a^3m^5}}$

18. $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-4\right)$

19. $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\right)$

20. $\sqrt{x}\left(\frac{4}{3}\sqrt{8x^3}-\sqrt{x}\right)$

21. $\left(\sqrt{3}-4\right)^2$

22. $\left(7\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

23. $\left(\sqrt{2m}+n\right)\left(\sqrt{2m}-4n\right)$

24. $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

25. $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x^2-y^2}$

26. $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$

27. $\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}$

28. $\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{3x^2-6xy+3y^2}$

29. $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\sqrt{(x+y)^2}$

30. $\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{3}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con índices diferentes

Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de *mínimo común índice*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\sqrt[3]{5x^2}\sqrt{3x}$.

Solución

Los índices de las raíces son 3 y 2 respectivamente, se busca el índice común:

$$\begin{array}{c|c} 3,\ 2 & 2 \\ 3,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1 & \end{array} \qquad \text{el mínimo común índice es 6}$$

Se transforman las raíces a un índice 6, de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{5x^2}=\sqrt[(3)(2)]{\left(5x^2\right)^2}=\sqrt[6]{5^2x^4} \qquad \sqrt{3x}=\sqrt[(2)(3)]{(3x)^3}=\sqrt[6]{3^3x^3}$$

Se efectúa la multiplicación, se simplifica el radical y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[6]{5^2x^4}\sqrt[6]{3^3x^3}=\sqrt[6]{\left(5^2x^4\right)\left(3^3x^3\right)}=\sqrt[6]{5^2\cdot3^3\cdot x^7}=\sqrt[6]{5^2\cdot3^3\cdot x^6x}=x\sqrt[6]{675x}$$

2 Realiza la siguiente operación: $\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}$.

Solución

Se busca el mínimo común índice de 4 y 2

$$\begin{array}{c|c} 4,\ 2 & 2 \\ 2,\ 1 & 2 \\ 1,\ 1 & \end{array} \qquad \text{mínimo común índice} = 4$$

Se transforman las raíces a índice 4 y se realiza la multiplicación:

$$\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[(2)(2)]{(xy)^2}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[4]{x^2y^2}=\sqrt[4]{\left(x^3y\right)\left(x^2y^2\right)}=\sqrt[4]{x^5y^3}=x\sqrt[4]{xy^3}$$

EJERCICIO 105

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[6]{2}$
2. $\sqrt[6]{x^5}\,\sqrt[3]{x^2}$
3. $\sqrt{x}\,\sqrt[16]{x^7}$
4. $\sqrt{3xy^2}\,\sqrt[3]{2x^3y}$
5. $3x\sqrt{x^3y}\,\sqrt[4]{xy^2}$
6. $\sqrt{2ab}\,\sqrt[4]{a^3b}$
7. $\sqrt[3]{3x^2}\,\sqrt{2x}$
8. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4xy}\right)\left(\sqrt{2xy}\right)$
9. $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt[4]{a}$
10. $\sqrt[6]{x^4}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{x}$
11. $\sqrt[12]{y^5}\,\sqrt{y}\,\sqrt[4]{y}$
12. $\frac{1}{y^2}\sqrt[4]{2y}\,\sqrt[3]{xy^2}\,\sqrt[12]{2y^5}$
13. $\left(\frac{n}{2m}\sqrt[3]{2m^2n}\right)\left(\frac{3}{n^2}\sqrt[9]{m^4n^8}\right)$
14. $\left(\frac{3x}{4y}\sqrt[5]{4x^3y^2}\right)\left(\sqrt{4xy^2}\right)$
15. $\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[6]{z}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Con índices iguales

Se realiza la división de los radicandos y se simplifica el resultado.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLOS

1 Resuelve la siguiente operación: $\dfrac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}$.

Solución

Se hace la división y el resultado se simplifica para obtener:

$$\frac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}=\sqrt[3]{\frac{81x^5}{3x^2}}=\sqrt[3]{27x^3}=\sqrt[3]{3^3x^3}=3x$$

2 Efectúa la siguiente operación: $\dfrac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}}$.

Solución

Se dividen las expresiones, se simplifica el resultado y se obtiene que:

$$\frac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}}=\sqrt{\frac{128a^3b^5}{8a^2b}}=\sqrt{16ab^4}=\sqrt{2^4ab^4}=2^2b^2\sqrt{a}=4b^2\sqrt{a}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}}$?

Solución

Los coeficientes de las expresiones se simplifican y se realiza la división con las bases:

$$\frac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}z^{-3}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}\frac{1}{z^3}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}\frac{x^7y^{10}}{z^3}}$$

Se simplifica el radical para obtener finalmente:

$$=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^6}\frac{x^6xy^9y}{z^3}}=\frac{3}{2^2}\frac{x^2y^3}{z}\sqrt[3]{xy}=\frac{3x^2y^3}{4z}\sqrt[3]{xy}$$

4 Obtén: $\dfrac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}}$.

Solución

Se descomponen los coeficientes en sus factores primos y se aplican los respectivos teoremas de exponentes:

$$\frac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{\frac{\left(2^3\right)^{-2}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{\frac{2^{-6}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{2^{-6-2}a^{5-(-3)}b^{-3-1}c^{5-(-7)}}$$

$$=\sqrt[4]{2^{-8}a^8b^{-4}c^{12}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2^8}a^8\,\frac{1}{b^4}c^{12}}=\sqrt[4]{\frac{a^8c^{12}}{2^8b^4}}=\frac{a^2c^3}{2^2b}=\frac{a^2c^3}{4b}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{a^2c^3}{4b}$

EJERCICIO 106

Realiza los siguientes cocientes de radicales:

1. $\dfrac{\sqrt[4]{m^6n^5}}{\sqrt[4]{m^4n}}$
2. $\dfrac{\sqrt[6]{x^8y^{15}}}{\sqrt[6]{xy^2}}$
3. $\dfrac{\sqrt{45a^7b^4c^3}}{\sqrt{5ac}}$
4. $\dfrac{\sqrt{128x^5y^4}}{\sqrt{8x^4y^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{162x^7y^6}}{\sqrt[3]{2xy}}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{3888a^5b^6}}{\sqrt[4]{3ab^2}}$
7. $\dfrac{\sqrt{4a^7b}}{\sqrt{25ab^9}}$
8. $\dfrac{\sqrt{567m^4x^6}}{\sqrt{7x^2}}$
9. $\dfrac{\sqrt{9m^{-5}n^{-1}}}{\sqrt{16m^{-1}n^{-13}}}$
10. $\dfrac{\sqrt[3]{16z^{-4}w^{-8}}}{\sqrt[3]{54z^{-1}w^{-2}}}$
11. $\dfrac{\sqrt{50z^3x^3}}{\sqrt{18x^3z^{-1}}}$
12. $\dfrac{\sqrt{44u^4v^6}}{\sqrt{275u^{-2}v^2}}$
13. $\dfrac{\sqrt{112b^{-2}a}}{\sqrt{63b^2a^{-3}}}$
14. $\dfrac{\sqrt{1404x^4y^{-3}}}{\sqrt{624x^{-2}y^5}}$
15. $\dfrac{\sqrt{68m^{-3}n^{-2}}}{\sqrt{153m^3n^2p^{-8}}}$
16. $\dfrac{\sqrt{216mn^{-2}p^{-2}}}{\sqrt{54mn^{-6}p^2}}$
17. $\dfrac{\sqrt[3]{243y^{\frac{3}{2}}x^{-2}}}{\sqrt[3]{72y^{-\frac{4}{6}}x}}$
18. $\dfrac{\sqrt[5]{3125y^4z^7}}{\sqrt[5]{32y^{-6}z^2}}$
19. $\dfrac{\sqrt[3]{-375m^{-2}n^{-2}}}{\sqrt[3]{192m^4n^{-7}}}$
20. $\dfrac{\sqrt[3]{72x^4y^{-2}}}{\sqrt[3]{576x^{-8}y^{-14}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con índices diferentes

Se transforman los radicales a un índice común y se realiza la división.

EJEMPLOS

1 Efectúa la siguiente división: $\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}$.

Solución

El mínimo común índice de 2 y 3 es 6, se expresa cada uno de los radicales con este índice:

$$\sqrt{128}=\sqrt{2^7}=\sqrt[(2)(3)]{\left(2^7\right)^3}=\sqrt[6]{2^{21}}\qquad \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[(3)(2)]{\left(2^4\right)^2}=\sqrt[6]{2^8}$$

Se remplazan los radicales y se efectúa la división:

$$\frac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[6]{2^{21}}}{\sqrt[6]{2^8}}=\sqrt[6]{\frac{2^{21}}{2^8}}=\sqrt[6]{2^{13}}=2^2\sqrt[6]{2}=4\sqrt[6]{2}$$

2 Simplifica: $\dfrac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}}$.

Solución

Se encuentra el índice común de 8 y 4, se transforman los radicales y se obtiene:

$$\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}}=\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[(2)(4)]{\left(x^3y\right)^2}}=\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[8]{x^6y^2}}=\sqrt[8]{\frac{x^3y^{-2}}{x^6y^2}}=\sqrt[8]{\frac{1}{x^3y^4}}=\frac{\sqrt[8]{1}}{\sqrt[8]{x^3y^4}}=\frac{1}{\sqrt[8]{x^3y^4}}$$

EJERCICIO 107

Efectúa las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\dfrac{\sqrt{4y^2}}{\sqrt[3]{2y^4}}$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{12x^3y}}{\sqrt{6x^2}}$
4. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{8ab}\div\dfrac{1}{12}\sqrt{4a^2}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[5]{a^3b^2}}$
6. $\dfrac{1}{6}\sqrt{3a}\div\dfrac{1}{12}\sqrt[6]{24a^4}$
7. $\sqrt[3]{5a^4}\div\sqrt[9]{125a^2}$
8. $\dfrac{\sqrt{12a^3b^2}}{\sqrt[3]{4ab}}$
9. $\dfrac{x\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^3y}}$
10. $\dfrac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt{x^3y}}$
11. $\dfrac{\sqrt[3]{16x^2y}}{\sqrt{4xy^2}}$
12. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}}$
13. $\dfrac{\sqrt[n]{(x+1)^{n+1}}}{\sqrt[n+1]{(x+1)^{n+2}}}$
14. $\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{x-1}}$
15. $\dfrac{\sqrt[4]{(a-b)^5}}{\sqrt[6]{(a-b)^5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización

Racionalización del denominador de una fracción

Esta operación transforma al denominador en una cantidad racional.

- **Denominador monomio.** En una fracción de la forma $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $m < n$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m+m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el denominador de: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Solución

El factor, por el que se multiplica el numerador y el denominador, resulta de la expresión $\sqrt[3]{2}$ y es igual a: $\sqrt[3]{2^{3-1}}=\sqrt[3]{2^2}$. Se realiza la multiplicación y se obtiene:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

2 Racionaliza el denominador de: $\frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}}$.

Solución

El factor que multiplica la expresión es $\sqrt[4]{(5xy)^{4-1}} = \sqrt[4]{(5xy)^3}$

Al realizar la multiplicación, se determina que:

$$\frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} = \frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^3}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^4}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{5xy} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{5^3x^3y^3} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{125x^3y^3}$$

3 Racionaliza el denominador de la expresión $\sqrt[3]{\frac{3}{4x}}$.

Solución

Se separa la expresión como el cociente de raíces, se multiplica numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt[3]{2^2x}$ y se racionaliza para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}}{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{2^3x^3}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{2x} = \frac{1}{2x}\sqrt[3]{6x^2}$$

- **Denominador binomio.** Una expresión de la forma $\frac{c}{a \pm b}$ se racionaliza multiplicando al numerador y denominador por el conjugado del denominador, esto es:

Si el denominador es de la forma $a + b$, entonces el conjugado es $a - b$.
Si el denominador es de la forma $a - b$, entonces el conjugado es $a + b$.

El producto de binomios conjugados es una diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En la multiplicación aplican las leyes de los exponentes y los radicales para simplificar las expresiones, como se muestra a continuación en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de la expresión: $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$.

Solución

El conjugado de $\sqrt{5}-2$ es $\sqrt{5}+2$ que multiplica al numerador y denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2} = \frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-(2)^2} = \frac{3\sqrt{5}+6}{5-4} = \frac{3\sqrt{5}+6}{1} = 3\sqrt{5}+6$$

Entonces, el resultado de la racionalización es: $3\sqrt{5}+6$

2 Racionaliza el denominador de la expresión: $\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}$.

Solución

El conjugado del denominador es $\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}$, al multiplicar el numerador y el denominador se reduce la expresión y el resultado es:

$$\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}=\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}\cdot\frac{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}=\frac{\left(\sqrt{3x}\right)^2-3\sqrt{6xy}-\sqrt{6xy}+3\left(\sqrt{2y}\right)^2}{\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(3\sqrt{2y}\right)^2}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+3(2y)}{3x-9(2y)}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$$

Al final, el resultado de la racionalización es: $\dfrac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$

Para racionalizar una expresión, cuyo índice del radical es 3, se multiplica por una expresión que dé como resultado una suma o diferencia de cubos.

Si el denominador es de la forma $(a+b)$, su conjugado es (a^2-ab+b^2).
Si el denominador es de la forma $(a-b)$, su conjugado es (a^2+ab+b^2).

Los resultados de la multiplicación son los siguientes:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplo

Racionaliza el denominador de la expresión: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Solución

Entonces, el conjugado del denominador $\sqrt[3]{x}-1$ es:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)(1)+(1)^2 \text{ o bien } \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, resulta una expresión equivalente que carece de raíces en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(1)^3}=\frac{2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$$

EJERCICIO 108

Racionaliza el denominador en las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
3. $\sqrt[3]{\dfrac{25}{18}}$
4. $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $\dfrac{6x^2y}{\sqrt{3xy}}$
6. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2xy}}$
7. $\dfrac{3a}{\sqrt[5]{2a}}$
8. $\dfrac{3a^2}{\sqrt[3]{9a^4b}}$

9. $\sqrt{\dfrac{3y^2}{8x^3y}}$

10. $\sqrt[4]{\dfrac{16ab^3}{25a^2b^5}}$

11. $\dfrac{-1}{1-2\sqrt{3}}$

12. $\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}$

13. $\dfrac{\sqrt{5x}}{1-\sqrt{5x}}$

14. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

15. $\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}{2\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}$

16. $\dfrac{3a-2b}{\sqrt{3a}-\sqrt{2b}}$

17. $\dfrac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}$

18. $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

19. $\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x}-1}$

20. $\dfrac{3a+b}{\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{b}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización del numerador de una fracción

Esta operación permite transformar el numerador en una cantidad racional.

Sea la fracción $\dfrac{\sqrt[n]{b^m}}{a}$, la racionalización del numerador es:

$$\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}=\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^n}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{b}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador en la expresión: $\dfrac{\sqrt{5x}}{3x}$.

Solución

El factor por el cual se multiplicará tanto numerador como denominador es $\sqrt{5x}$

$$\frac{\sqrt{5x}}{3x}=\frac{\sqrt{5x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}=\frac{\sqrt{5^2x^2}}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5x}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5}{3\sqrt{5x}}$$

2 Racionaliza el numerador en la expresión: $\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}$.

Solución

Se factoriza el denominador y se multiplica por el conjugado de la expresión $\sqrt{2x}-\sqrt{3y}$ para obtener:

$$\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}=\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{(2x+3y)(2x-3y)}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}=\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(\sqrt{3y}\right)^2}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{2x-3y}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{1}{(2x+3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

3 Racionaliza la expresión: $\sqrt{x}+\sqrt{3}$.

Solución

Se multiplica la expresión por su conjugado, tanto en el numerador como en el denominador, en este caso $\sqrt{x}-\sqrt{3}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

4 Racionaliza el numerador en la expresión: $\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}$.

Solución

Debido a que las raíces son cúbicas, se toma el conjugado de la expresión: $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}$ como $\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}$

Por tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}=\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\left(\sqrt[3]{y}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{y+2}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}$$

EJERCICIO **109**

Racionaliza los numeradores de las siguientes fracciones:

1. $\sqrt{3}$
2. $\frac{5\sqrt{8}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$
5. $\frac{\sqrt[3]{xy}}{2xy^2}$
6. $\frac{\sqrt[4]{x}}{3x}$
7. $\frac{3\sqrt{6x}}{12x}$
8. $\frac{\sqrt[3]{2x^2}}{4x}$
9. $\frac{\sqrt[5]{16x^3}}{x^2}$
10. $\frac{\sqrt{3x^3}}{6xy}$
11. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$
12. $\frac{5-\sqrt{2}}{23}$
13. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
14. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{x^2-9}$
15. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$
16. $\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{6y}}{10x-12y}$
17. $\sqrt{x}-\sqrt{5}$
18. $\frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$
19. $\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{a-8b}$
20. $\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{y}}{y^2-4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 11

NÚMEROS COMPLEJOS

Reseña HISTÓRICA

Los números complejos

- En el siglo XVI Rafaello Bombelli fue uno de los primeros en admitir la utilidad de que los números negativos tuviesen raíces cuadradas. Fue el primero en escribir las reglas de suma, resta y producto de los complejos.
- En 1777 el matemático suizo Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra i (por imaginario), introdujo la forma binómica $i^2 = -1$ y con él definitivamente se introducen los imaginarios a la matemática.
- Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra: todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja, y estableció en 1831 la interpretación geométrica de los complejos: $x + yi \rightarrow (x, y)$.
- Otros términos que han sido usados para referirse a los números complejos son: "sofisticados" por Cardano, "sin sentido" por Néper, "inexplicables" por Girard, "incomprensibles" por Huygens e "imposibles" (diversos autores).

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Números imaginarios

El conjunto de los números imaginarios surge de la necesidad de obtener la raíz cuadrada de un número negativo para lo cual se define como unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$.

Número imaginario puro

Se denomina así a los números de la forma bi donde b es un número real y $b \neq 0$.

Ejemplos

Las siguientes cantidades son números imaginarios puros:

$$2i,\ -4i,\ \frac{6}{5}i,\ \sqrt{3}\,i$$

En los siguientes ejemplos se ilustra cómo obtener números imaginarios puros:

EJEMPLOS

1 Obtén el resultado de: $\sqrt{-25}$.

Solución

Se expresa el radicando como: $-25 = 25(-1)$ y se aplican los teoremas correspondientes de radicales:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$$

Se sustituye $\sqrt{-1} = i$ para obtener:

$$\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1} = 5i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $2-\sqrt{-\frac{25}{16}}$?

Solución

Se aplica el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior y se obtiene como resultado:

$$2-\sqrt{-\frac{25}{16}} = 2-\sqrt{\frac{25}{16}(-1)} = 2-\sqrt{\frac{25}{16}}\sqrt{-1} = 2-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}i = 2-\frac{5}{4}i$$

EJERCICIO 110

Representa las siguientes raíces en términos de la unidad imaginaria i:

1. $\sqrt{-16}$
2. $\sqrt{-36}$
3. $\sqrt{-49}$
4. $\sqrt{-121}$
5. $\sqrt{-625}$
6. $\sqrt{-8}$
7. $\sqrt{-50}$
8. $\sqrt{-54}$
9. $\sqrt{-125}$
10. $\sqrt{-162}$
11. $\sqrt{-\frac{12}{49}}$
12. $\sqrt{-\frac{75}{4}}$
13. $3+\sqrt{-36}$
14. $2-\sqrt{-112}$
15. $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{-45}$
16. $\frac{4}{5}-\frac{2}{7}\sqrt{-98}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Para realizar estas operaciones se suman o restan los coeficientes de i:

$$ai + bi - ci = (a + b - c)\, i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9}$.

Solución

Se obtienen los números imaginarios puros:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6\sqrt{-1} = 6i \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

Se remplazan los radicales y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9} = 6i + 4(3i) = 6i + 12i = (6+12)i = 18i$$

2 ¿Cuál es el resultado de: $\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20}$?

Solución

Se expresan las raíces en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5}i \qquad \sqrt{-45} = \sqrt{3^2 \cdot 5(-1)} = 3\sqrt{5}i \qquad \sqrt{-20} = \sqrt{2^2 \cdot 5(-1)} = 2\sqrt{5}i$$

Se sustituyen los números y se realizan las operaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20} &= \sqrt{5}i + \frac{2}{3}\left(3\sqrt{5}i\right) - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}i\right)\\ &= \sqrt{5}i + 2\sqrt{5}i - \sqrt{5}i\\ &= \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right) i\\ &= 2\sqrt{5}\, i\end{aligned}$$

3 Determina el resultado de: $\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25}$.

Solución

Se extraen las raíces, se multiplican por los coeficientes y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25} &= \frac{1}{2}(2i) + \frac{2}{5}(3i) - \frac{1}{3}(5i) = i + \frac{6}{5}i - \frac{5}{3}i\\ &= \left(1 + \frac{6}{5} - \frac{5}{3}\right)i = \frac{8}{15}i\end{aligned}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\sqrt{-72} + \sqrt{-48} - \sqrt{-162} - \sqrt{-300}$.

Solución

Se expresa cada uno de los radicales en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-72} = \sqrt{36 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-48} = \sqrt{16 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{3}i$$
$$\sqrt{-162} = \sqrt{81 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 9\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-300} = \sqrt{100 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 10\sqrt{3}i$$

(continúa)

(*continuación*)

Se sustituye y se procede a efectuar la operación:

$$\begin{aligned}\sqrt{-72}+\sqrt{-48}-\sqrt{-162}-\sqrt{-300} &= 6\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-9\sqrt{2}i-10\sqrt{3}i\\ &= 6\sqrt{2}i-9\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-10\sqrt{3}i\\ &= \left(6\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)i+\left(4\sqrt{3}-10\sqrt{3}\right)i\\ &= -3\sqrt{2}i-6\sqrt{3}i\\ &= \left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i \text{ o } = -3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $\left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i$ o $=-3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i$

EJERCICIO 111

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-9}+3\sqrt{-4}$
2. $\sqrt{-16}+\sqrt{25}-\sqrt{-9}-\sqrt{4}$
3. $\sqrt{-4}-3\sqrt{-1}+4\sqrt{-9}-5\sqrt{-16}$
4. $3\sqrt{-16}-\frac{1}{2}\sqrt{-64}+\sqrt{-9}$
5. $\sqrt{-54}+\sqrt{-150}-\sqrt{-24}$
6. $3\sqrt{-2}+2\sqrt{-8}-\sqrt{-32}-\sqrt{-18}$
7. $\sqrt{-18}+\sqrt{-75}-\sqrt{-98}-\sqrt{-12}$
8. $\frac{2}{3}\sqrt{-27}+\frac{1}{2}\sqrt{-50}-\frac{3}{4}\sqrt{-12}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{4}\,i+3\sqrt{9}-\frac{1}{5}\sqrt{-100}+2$
10. $13-\sqrt{(9)(4)}+4\sqrt{-25}-20i$
11. $\sqrt{-x^2}+x\sqrt{-9}-\sqrt{-16x^2}$
12. $\sqrt{-18x^3}+x\sqrt{-8x}-5x\sqrt{-2x}$
13. $\sqrt[8]{-6\,561}+\sqrt[8]{-256}$
14. $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}x^5}+\frac{5}{4}x\sqrt[4]{-x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencias de *i*

Se obtienen al elevar la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$ a la enésima potencia, con $n \in N$.

$$i^1 = i \qquad i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i \qquad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

Para las potencias mayores que 4, los resultados son equivalentes a los anteriores; con el fin de poder determinarlos, la potencia se descompone de la siguiente manera:

$$i^n=i^{4m+k}=i^k \text{ con } n=4m+k$$

Donde n, m y $k \in N$, además $n > 4$ y $k < 4$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de i^{13}?

Solución

La potencia i^{13} se representa como sigue:

$$i^{13} = i^{12+1} = i^{4(3)+1}$$

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$i^{13} = i^{4(3)+1} = i^{1} = i$$

Por tanto, se deduce que: $i^{13} = i$

2 Obtén el resultado de: $i^{6} + 2i^{9} - i^{11}$.

Solución

Se obtienen los valores de las potencias de i:

$$i^{6} = i^{4(1)+2} = i^{2} = -1 \qquad i^{9} = i^{4(2)+1} = i^{1} = i \qquad i^{11} = i^{4(2)+3} = i^{3} = -i$$

Al sustituir estas equivalencias y realizar las operaciones se determina que:

$$i^{6} + 2i^{9} - i^{11} = -1 + 2i - (-i) = -1 + 2i + i = -1 + 3i\ .$$

EJERCICIO **112**

Desarrolla las potencias y simplifica las operaciones:

1. i^{14}
2. i^{15}
3. $3i^{31}$
4. i^{58}
5. i^{65}
6. $2i^{3} + 3i^{5}$
7. $i^{8} - i^{9} + i^{10}$
8. $i^{4} + i^{3} - 3i^{16} + 4i^{5}$
9. $2i^{17} + 3i^{21} - i^{5}$
10. $i^{55} - i^{34} + i^{77}$
11. $i^{9} - 2i^{12} + i^{15} - 3i^{23}$
12. $i^{100} - i^{24}$
13. $i^{2} + i^{4} + i^{6} + i^{8} + ... + i^{2n}$ si n es impar
14. $i^{3} + i^{5} + i^{7} + i^{9} + ... + i^{2n+1}$ si n es par o impar
15. Halla el resultado de: $i + i^{2} + i^{3} + ... + i^{100}$
16. Verifica la siguiente igualdad: $i^{n+1} + i^{n+2} = -i^{n} + i^{n+1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación y división

Para realizar estas operaciones, los radicales se tienen que expresar en términos de i, posteriormente se aplican las siguientes fórmulas:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Para números imaginarios la operación $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} \neq \sqrt{(-2)(-2)}$, ya que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ sólo son verdaderas si a y b son positivos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\sqrt{\frac{-9}{16}}\cdot\sqrt{-4}$.

Solución

Se expresan las raíces en términos de i, para después realizar la operación:

$$\sqrt{\frac{-9}{16}}\cdot\sqrt{-4}=\left(\frac{3}{4}i\right)(2i)=\frac{6}{4}i^2=\frac{3}{2}(-1)=-\frac{3}{2}$$

2 Efectúa el producto de: $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-28}\cdot\sqrt{-\frac{4}{7}}$.

Solución

Se expresan las raíces en términos de i, se realiza el producto y el resultado es:

$$\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-28}\cdot\sqrt{-\frac{4}{7}}=(3i)\left(2\sqrt{7}\,i\right)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}i\right)=\frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{7}}i^3=12(-i)=-12i$$

3 Efectúa $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$.

Solución

Se obtienen las raíces:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5i \qquad \sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$$

Se sustituyen las equivalencias y se determina que:

$$\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}=\frac{5i}{2i}=\frac{5}{2}$$

4 Obtén el cociente de: $\frac{\sqrt{-48}+\sqrt{-75}-\sqrt{-147}}{\sqrt{-12}}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se realiza la división y se obtiene como resultado:

$$\frac{\sqrt{-48}+\sqrt{-75}-\sqrt{-147}}{\sqrt{-12}}=\frac{4\sqrt{3}\,i+5\sqrt{3}\,i-7\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}\,i}=\frac{2\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}\,i}=1$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{i^4-2i^2+1}{i^3-i^5}$.

Solución

Se sustituyen las equivalencias de cada potencia y se simplifica:

$$\frac{i^4-2i^2+1}{i^3-i^5}=\frac{(1)-2(-1)+1}{(-i)-(i)}=\frac{1+2+1}{-2i}=\frac{4}{-2i}=-\frac{2}{i}$$

EJERCICIO 113

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27}$
2. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-18}\cdot\sqrt{-3}$
3. $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-6}$
4. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{-9}\right)$
5. $\frac{1}{8}\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-9}-\frac{1}{4}\sqrt{-25}$
6. $\sqrt{-\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{-\frac{81}{4}}$
7. $\sqrt{-25}\left(3\sqrt{-4}+2\sqrt{-9}\right)$
8. $\sqrt{-18}\left(\sqrt{-2}+\sqrt{-3}\right)$
9. $\frac{\sqrt{-144}}{\sqrt{9}}$
10. $\frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-4}}$
11. $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-75}}$
12. $\frac{\sqrt{-8}-\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$
13. $\frac{\sqrt{-4}+\sqrt{-49}}{\sqrt{100}}$
14. $\frac{\sqrt{-5}+\sqrt{-45}+\sqrt{-20}}{\sqrt{-125}}$
15. $\left(\sqrt{-8}+\sqrt{-18}-\sqrt{-50}\right)\div\sqrt{-32}$
16. $\left(i^3+i^5\right)\div(1-i)$
17. $\frac{1}{i^4-2i^2+1}$
18. $\frac{i^n\cdot i^{2n+2}}{i^{2n}}$
19. $\frac{i^{n+2}+i^{n-2}}{\sqrt[n+1]{i^{n^2-2n-3}}}$
20. $\frac{i+i^2+i^3+...+i^{1001}}{i+i^2+i^3+...+i^{999}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números complejos

Se forman por una parte real y una imaginaria.

Son de la forma $z = a + bi$, con $a, b \in R$, donde:

$$a = \text{Re}(z) \text{ parte real y } b = \text{Im}(z) \text{ parte imaginaria}$$

Un número complejo se representa de las siguientes formas:

forma rectangular o binomial	forma cartesiana
$z = a + bi$	$z = (a,b)$
$z = a$	$z = (a,0)$
$z = bi$	$z = (0,b)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma cartesiana los números complejos: $z_1 = -4 + 5i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 8$.

Solución

	Forma cartesiana
$z_1 = -4 + 5i$	$z_1 = (-4, 5)$
$z_2 = 2i$	$z_2 = (0, 2)$
$z_3 = 8$	$z_3 = (8, 0)$

2 Representa en forma binomial o rectangular los siguientes números complejos: $z_1 = (3, -1)$, $z_2 = (2, 0)$ y $z_3 = (0, -3)$.

Solución

	Forma binomial
$z_1 = (3, -1)$	$z_1 = 3 - i$
$z_2 = (2, 0)$	$z_2 = 2$
$z_3 = (0, -3)$	$z_3 = -3i$

EJERCICIO 114

Representa los siguientes números complejos en su forma binomial o cartesiana, según sea el caso:

1. $2 + 3i$
2. $(-1, 5)$
3. $7i$
4. $\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i$
5. $5 - 2i$
6. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{6}{7}\right)$
7. $(0, -2)$
8. $-\frac{1}{3}$
9. $(3, 0)$
10. $5 - \frac{2}{11}i$
11. $\left(\frac{5}{2}, -8\right)$
12. $1 - i$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Sean los números complejos $z = a + bi$, $w = c + di$

Se define:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d)$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i = (a - c, b - d)$$

EJEMPLOS

1 Sean los números complejos $z = 2 + 3i$ y $w = -4 + 6i$, realiza: $(z + w)$ y $(z - w)$.

Solución

Se aplica la fórmula para la suma y la resta, para obtener:

$$z + w = (2 + 3i) + (-4 + 6i) = (2 + (-4)) + (3 + 6)i = -2 + 9i$$
$$z - w = (2 + 3i) - (-4 + 6i) = (2 - (-4)) + (3 - 6)i = 6 - 3i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $(4 - 2i) + (-3 + 4i)$?

Solución

Se aplica la fórmula de la resta y se obtiene:

$$(4 - 2i) + (-3 + 4i) = (4 + (-3)) + (-2 + 4)i = 1 + 2i = (1, 2)$$

3 Efectúa la siguiente operación: $(-5, -4) - (-6, 1)$.

Solución

Se representan ambos complejos en su forma rectangular y se realiza la operación:

$$(-5, -4) - (-6, 1) = (-5 - 4i) - (-6 + i) = (-5 - (-6)) + (-4 - 1)\,i = 1 - 5i$$

Este resultado también se representa como $(1, -5)$

4 Resuelve: $\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)$.

Solución

Se expresa el segundo sumando en su forma rectangular y se efectúa la suma:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2+\frac{1}{3}i\right)=\left(\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)i$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i \quad \text{o} \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i$ o $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$

Multiplicación por un escalar

Para efectuar la operación se multiplica el escalar por la parte real e imaginaria del número complejo como lo indica la siguiente fórmula:

$$c(a+bi) = ac + bci$$

EJEMPLOS

1 Realiza la operación: $3(2-5i)$.

Solución

Se realiza la multiplicación de 3 por ambos elementos del número complejo:

$$3(2-5i) = 3(2) - 3(5i) = 6 - 15i$$

Por tanto, el resultado de la operación es: $6 - 15i$

2 Obtén el resultado de: $3(7-4i)-2(-3+2i)$.

Solución

Se realiza el producto de los escalares por los números complejos:

$$3(7-4i)-2(-3+2i) = ((3)(7)-(3)(4)i)+((-2)(-3)+(-2)(2)i)$$
$$= (21-12i)+(6-4i)$$
$$= (21+6)+(-12-4)i$$
$$= 27-16i$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)$?

Solución

Se multiplican los coeficientes, se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)=\left(\frac{3}{4}(2)+\frac{3}{4}(-5i)\right)+\left(\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i\right)\right)$$
$$=\left(\frac{6}{4}-\frac{15}{4}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)$$
$$=\left(\frac{6}{4}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{15}{4}+\frac{1}{4}\right)i$$
$$=3-\frac{7}{2}i$$

Por consiguiente, el resultado es: $3-\frac{7}{2}i$

EJERCICIO 115

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3, 2)+(7, -1)$
2. $(-2, 5)-(-3, 5)$
3. $(1, -3)+(-3, -2)$
4. $(0, -6)-(-5, 0)$
5. $\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4},\frac{1}{6}\right)$
6. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$
7. $\left(\frac{4}{5},0\right)+\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(\sqrt{2},-3\right)-(0, 2)$
9. $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)-(0, 0)$
10. Si $z=2+3i$ y $z_1=5-4i$, encuentra $z+z_1$
11. Si $z_1=3-2i$ y $z_2=3+2i$, obtén z_1+z_2
12. Si $z_1=4-5i$ y $z_2=4-5i$, encuentra z_1-z_2
13. Si $w=3-4i$ y $w_1=2+7i$, realiza w_1-w
14. Si $z=1-i$, $z_1=1+i$ y $z_2=i$, encuentra z_1-z+z_2
15. Si $z_1=7-3i$ y $z_2=4-\frac{1}{2}i$, calcula z_1+z_2
16. Si $z=2-3i$, $z_1=10i$ y $z_2=2+3i$, realiza $z+z_2-z_1$

17. Si $z_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{6}i$ y $z_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$, encuentra $z_1 + z_2$

18. Si $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ y $z_3 = \frac{1}{4} - 2i$, obtén $z_1 - (z_2 + z_3)$

19. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 5i$ y $z_3 = 1 + 3i$, encuentra $z_1 - z_2 + z_3$

20. Si $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 - i$, y $z_3 = -2 - 3i$, ¿cuál es el resultado de $2z_1 - 3z_2 + z_3$?

21. Si $z_1 = 7 + 4i$, $z_2 = 6 - 2i$ y $z_3 = -3 - 3i$. Efectúa: $z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{2}{3}z_3$

22. Si $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$, $z_2 = 4 - \frac{2}{3}i$, y $z_3 = 1 + \frac{3}{2}i$. Efectúa: $4z_1 - \frac{3}{4}z_2 + 5z_3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se define el producto como:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLOS

1 Realiza la siguiente operación: $(3 - 2i)(-4 + 5i)$.

Solución

Se observa que: $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$ y $d = 5$, aplicando la definición se obtiene:

$$\begin{aligned}(3 - 2i)(-4 + 5i) &= [(3)(-4) - (-2)(5)] + [(3)(5) + (-2)(-4)]i \\ &= (-12 + 10) + (15 + 8)i \\ &= -2 + 23i \quad \text{o} \quad (-2, 23)\end{aligned}$$

2 Halla el resultado de: $(2 - 5i)(2 + 5i)$.

Solución

Se identifican los valores

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 2 \quad d = 5$$

Se aplica la definición: $(ac - bd) + (ad + bc)i$, para determinar que:

$$\begin{aligned}(2 - 5i)(2 + 5i) &= [(2)(2) - (-5)(5)] + [(2)(5) + (-5)(2)]i \\ &= (4 + 25) + (10 - 10)i \\ &= 29 + 0i \quad \text{o} \quad (29, 0)\end{aligned}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right)$?

Solución

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2) - (3)\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + (3)(2)\right]i$$

(continúa)

(*continuación*)

$$=\left[1+\frac{9}{5}\right]+\left[-\frac{3}{10}+6\right]i$$
$$=\frac{14}{5}+\frac{57}{10}i$$

EJERCICIO 116

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $(3-4i)(-3-2i)$
2. $(2, 3)(1, -1)$
3. $(2, 0)(3, 2)$
4. $(1-i)(2, -1)$
5. $(1+2i)^2$
6. $(\sqrt{2},\sqrt{3})(\sqrt{2},\sqrt{3})$
7. Si $z=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y $w=(2,3)$, determina $z\cdot w$
8. Si $z_1=\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ y $z_2=(0,\sqrt{2})$, efectúa $z_1\cdot z_2$
9. Si $w=6-2i$ y $w_1=3i$, encuentra $w\cdot w_1$
10. Si $z=(4,-1)$ $z_1=(2,-3)$ y $z_2=(-1,1)$ obtén $z_2(z+z_1)$
11. Si $z=1-3i$ $w=\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $v=2+i$, determina $z(w-v)$
12. Si $z=(1,2)$ $z_1=(2,0)$ y $z_2=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, encuentra $z\cdot z_1-4z_2$
13. Si $z=1-3i$, determina z^2
14. Si $w=\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right)$, efectúa w^2
15. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-3i$, encuentra $(z_1\cdot z_2)^2$
16. Si $z=1+i$ y $w=1-i$, realiza $z^2\cdot w^2$
17. Si $z=2i-3$, $w=1-2i$ y $v=4+3i$, realiza la operación: $2z-3w+v$
18. Si $z_1=6-3i$, $z_2=4+2i$ y $z_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$, determina: $\left(\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{2}z_2-6z_3\right)^2$
19. Prueba que si $z=a+bi$ y $w=a-bi$, entonces $z\cdot w=\text{Re}(z)^2+\text{Im}(z)^2$
20. Prueba que si $z_1=1+i$ y $z_2=1-i$, entonces $z_1^{\,n}\cdot z_2^{\,n}=\left[\text{Re}(z_1)+\text{Re}(z_2)\right]^n$
21. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(-1)^{\frac{n}{2}}(2,0)^n$ con n par $\in N$
22. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(0,2)^n$ con n impar $\in N$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Sean los complejos $z = a + bi$, $w = x + yi$, la división $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi}$

Se define como:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right)i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{6+4i}{3-5i}$.

Solución

Se identifican los valores:

$$a=6 \quad b=4 \quad x=3 \quad y=-5$$

Se aplica la definición:

$$\frac{6+4i}{3-5i} = \left[\frac{(6)(3)+(4)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right]+\left[\frac{(4)(3)-(6)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right]i = \frac{(18)+(-20)}{9+25}+\frac{(12)-(-30)}{9+25}i$$

$$= \frac{18-20}{9+25}+\frac{12+30}{9+25}i$$

$$= -\frac{2}{34}+\frac{42}{34}i$$

$$= -\frac{1}{17}+\frac{21}{17}i$$

Por tanto, $\frac{6+4i}{3-5i} = -\frac{1}{17}+\frac{21}{17}i$ o $\left(-\frac{1}{17},\frac{21}{17}\right)$

2 Halla el resultado de: $\frac{4-i}{2+3i}$.

Solución

Los valores de $a = 4$, $b = -1$, $x = 2$, $y = 3$, se aplica la definición:

$$\frac{4-i}{2+3i} = \left[\frac{(4)(2)+(-1)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right]+\left[\frac{(-1)(2)-(4)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right]i = \frac{(8)+(-3)}{4+9}+\frac{(-2)-(12)}{4+9}i$$

$$= \frac{8-3}{4+9}-\frac{-2-12}{4+9}i$$

$$= \frac{5}{13}+\frac{-14}{13}i$$

$$= \frac{5}{13}-\frac{14}{13}i$$

Por consiguiente, $\frac{4-i}{2+3i} = \frac{5}{13}-\frac{14}{13}i$, el cual en su forma cartesiana es $\left(\frac{5}{13},-\frac{14}{13}\right)$

3 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3-i}$.

Solución

Se obtienen los respectivos valores:

$$a=2 \qquad b=0 \qquad x=3 \qquad y=-1$$

Sustituyendo en la definición, se obtiene:

$$\frac{2}{3-i}=\left(\frac{(2)(3)+(0)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)+\left(\frac{(0)(3)-(2)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)i=\left(\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)i=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

4 Determina el resultado de: $\frac{i}{1+i}$.

Solución

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\frac{i}{1+i}=\left[\frac{(0)(1)+(1)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]+\left[\frac{(1)(1)-(0)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]i=\frac{0+1}{1+1}+\frac{1-0}{1+1}i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Por tanto, $\frac{i}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

EJERCICIO 117

Efectúa las siguientes operaciones:

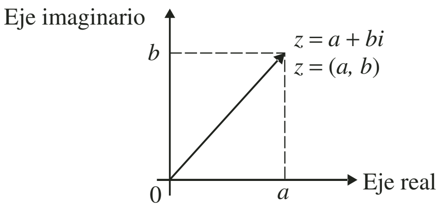
1. $\frac{i}{1-2i}$
2. $\frac{3-2i}{3+2i}$
3. $\frac{1-3i}{i}$
4. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$
5. $\frac{1-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$
6. $\frac{2}{1-i}$
7. $\frac{2-i}{1-i}$
8. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-2i$, encuentra $\frac{z_1}{z_2}$
9. Si $z_1=3+2i$ y $z=1-$ i, realiza $\frac{z_1}{z^2}$
10. Si $z=1-7i$ y $w=1+2i$, determina $\frac{z}{w}$
11. Si $z=4-3i$ y $w=1+2i$, efectúa $\frac{w}{z}$
12. Si $z=1-3i$ y $w=2+7i$, ¿cuál es el resultado de $\frac{w^2}{z}$?
13. Si $z_1=3-i$, $z_2=1+i$ y $z_3=\sqrt{2}+i$, realiza $\frac{z_1+z_2}{z_3}$
14. Si $z_1=2+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=3-2i$ y $z_4=-2+3i$, efectúa: $\frac{z_1-z_2}{z_3+z_4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Representación gráfica

Para representar en el plano cartesiano cualquier número complejo de la forma $z=a+bi$, se ubica a la *parte real* en el eje horizontal (eje real) y a la *parte imaginaria* en el eje vertical (eje imaginario).

Sea el número complejo $z = a + bi$, entonces su representación gráfica es:



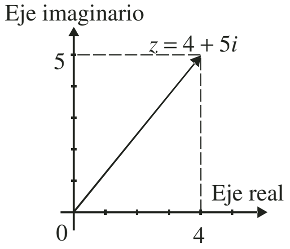
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica el siguiente número complejo: $z = 4 + 5i$.

Solución

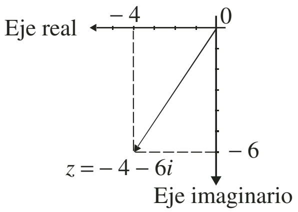
Se convierte en la forma cartesiana $z = (4, 5)$, y su gráfica es:



2 Grafica: $z_2 = -4 - 6i$.

Solución

Se ubica el punto $(-4, -6)$ en el plano y se une con el origen mediante un segmento de recta, y se obtiene la representación gráfica de z_2:



EJERCICIO 118

Grafica los siguientes números complejos:

1. $z_1 = -6 + 5i$
2. $z_2 = (3, -4)$
3. $z_3 = (-1, -2)$
4. $z_4 = -2 + 4i$
5. $z_5 = 5 - 2i$
6. $z_6 = (6, 2)$
7. $w = (1, 2) + (-3, -5)$
8. $z = (-4, 6) - (1, -3)$
9. $v = (2, 3)(1, -1)$
10. $w_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$
11. $w_2 = (3, -1)(2, 0) - (-1, -1)$
12. $w_3 = \dfrac{(1,2)-(2,-1)}{(0,1)}$

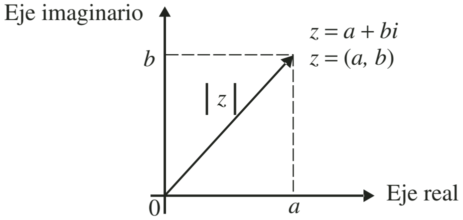
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor absoluto o módulo

El módulo de un complejo es la distancia que existe del origen al punto que determina el número complejo. Su magnitud está dada por la fórmula:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{\left[Re(z)\right]^2 + \left[Im(z)\right]^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

y su representación gráfica es:



Propiedades del valor absoluto

Sean los números complejos z y z_1, entonces:

1. $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$
2. $|z + z_1| \leq |z| + |z_1|$
3. $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el módulo de $z = 3 - 4i$.

Solución

Se sustituye $a = 3$ y $b = -4$ en la fórmula y se obtiene como resultado:

$$|z| = |3-4i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

El resultado indica que existen 5 unidades del origen al punto $z = (3, -4)$

2 ¿Cuál es el módulo del número complejo $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$?

Solución

Se sustituyen los valores y se obtiene:

$$|z_2| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

3 Determina el valor absoluto del número complejo $z_4 = (1, 7)$.

Solución

Se sustituyen los valores en la fórmula y resulta que el módulo de z_4 es:

$$|z_4| = \sqrt{(1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

4 Para $z = 3 + 4i$ y $w = 2 - i$, prueba que $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Solución

Se obtiene $|z+w|$

$$|z+w| = |(3+4i)+(2-i)| = |5+3i|$$
$$= \sqrt{(5)^2+(3)^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

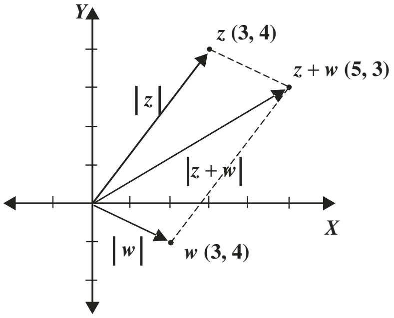
luego,

$$|z|+|w| = |3+4i|+|2-i|$$
$$= \sqrt{(3)^2+(4)^2} + \sqrt{(2)^2+(-1)^2}$$
$$= 5 + \sqrt{5}$$

Por tanto, se comprueba que:

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$
$$\sqrt{34} \leq 5 + \sqrt{5}$$

Las magnitudes de los números complejos en el plano cartesiano se representan de la siguiente manera:



Conjugado

El conjugado del complejo $z = a + bi$, se define como:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplos

Complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$-4 - 8i$	$-4 + 8i$
-3	-3
$-4i$	$4i$

Teorema: sea $z = a + bi$ entonces $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Propiedades

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\bar{z}+z = Re(z)$
4. $\bar{z}-z = -2\,Im(z)$
5. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
6. Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Demostraciones

1. Se determina la suma de los complejos z y w:

$$z + w = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Luego el conjugado de $z + w$ se define como:

$$\overline{z+w} = (a+c)-(b+d)i$$

Se desarrolla la operación, asociando como se observa y se determina que:

$$\overline{z+w} = (a + c) - (b + d)i = (a + c) + (-b - d)i = (a - b) + (c - d)i = \bar{z} + \bar{w}$$

2. El producto de los complejos z y w es:

$$z \cdot w = (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Luego, el conjugado de $z \cdot w$ se define como:

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

Se desarrolla la operación y se agrupan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(ac - bd) - (ad + bc)\, i &= (ac - bd) + (-ad - bc)i \\ &= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)(c))i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$

3. Se determina la suma del complejo z y su conjugado $\bar{z}$:

$$\bar{z} - z = (a - bi) + (a + bi) = (a + a) + (-b + b)i = 2a + 0i = 2a$$

Pero a es la parte real del complejo z, por lo tanto

$$\bar{z} + z = 2\,\text{Re}(z)$$

4. Se obtiene la diferencia del conjugado $\bar{z}$ y el complejo z:

$$\bar{z} - z = (a - bi) - (a + bi) = (a - a) + (-b - b)i = 0a - 2bi = -2bi$$

Pero bi es la parte imaginaria de z, entonces:

$$\bar{z} - z = 2\,\text{Im}(z)$$

5. Se obtiene el valor absoluto de z y se eleva al cuadrado:

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

Pero si $z = a + bi$ entonces $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ por lo tanto:

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$$

6. Siendo $z = a + bi$, se realiza la división $\frac{1}{z}$ obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} = \frac{1+0i}{a+bi} = \left[\frac{(1)(a)+(0)(b)}{a^2+b^2}\right] + \left[\frac{(0)(a)-(1)(b)}{a^2+b^2}\right]i &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

El denominador de cada término es el mismo, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Pero $\bar{z} = a - bi$ y $|z|^2 = a^2 + b^2$, entonces se obtiene:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

EJEMPLOS

1 Si $z = 2 + 3i$ y $w = -1 + i$, determina $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{z\cdot w}}$.

Solución

Se aplican las propiedades de los complejos:

$$\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w} = (2-3i)+(-1-i) = (2-1)+(-3-1)i = 1-4i$$
$$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w} = (2-3i)(-1-i) = -5+i$$

Luego,

$$\frac{\overline{z+w}}{\overline{z\cdot w}} = \frac{1-4i}{-5+i} = -\frac{9}{26}+\frac{19}{26}i$$

2 Si $z = -4 + i$ y $w = -2 + 5i$, determina $\dfrac{z\cdot\bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)}$

Solución

Se aplican las propiedades de los complejos y se obtiene:

$$\frac{z\cdot\bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)} = \frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]}$$

Se sustituyen el valor absoluto de z, el número real de w y el número imaginario de z:

$$\frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]} = \frac{(-4)^2+(1)^2}{[2(-2)]\cdot[-2(i)]} = \frac{17}{(-4)(-2i)} = \frac{17}{8i}$$

Se realiza la división:

$$\frac{17}{8i} = \frac{17}{8}\cdot\frac{1}{i}$$

Pero $\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{(0)^2+(1)^2} = -i$, entonces se obtiene::

$$= \frac{17}{8}(-i) = -\frac{17}{8}i$$

EJERCICIO 119

Encuentra el valor absoluto o módulo de los siguientes números complejos:

1. $2+3i$
2. $5-4i$
3. $4-5i$
4. $3i$
5. $1-2i$
6. $6-7i$
7. $\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,i$
8. $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$
9. $\left(\sqrt{2},0\right)$
10. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},5\right)$
11. $\frac{4}{3}-2i$
12. $\sqrt{2}-3\,i$

Determina el conjugado de los siguientes números complejos:

13. $5+4i$
14. $(-5,0)$
15. $1+i$
16. $5i$
17. $\frac{1}{2}i$
18. $(2,1)$
19. $(0,-3)$
20. $-\frac{3}{7}-\frac{2}{5}i$
21. $-2+6i$
22. $(-1,-1)$
23. $-2+\frac{11}{4}i$
24. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

Sean los números complejos $z=2i+1$, $z_1=4-2i$ y $z_2=(5,1)$ demuestra que:

25. $|z+z_1|\leq|z|+|z_1|$
26. $|z\cdot z_1|=|z|\cdot|z_1|$
27. $|z_1+z_2+z|\leq|z_1+z_2|+|z|$
28. $|(z_1+z_2)(z)|=|z_1+z_2|\cdot|z|$
29. $|z\cdot z_1\cdot z_2|=|z|\cdot|z_1|\cdot|z_2|$
30. $|z_1\cdot z_2|+|z_2\cdot z|\leq|z_2|\left(|z_1|+|z|\right)$

Nota: Estas demostraciones no se incluyen en las soluciones.

Sean los complejos $z=2-3i$, $w=1+i$ y $v=2-i$, determina:

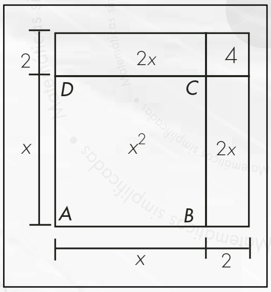
31. $\overline{z+w}$
32. $\overline{w+v}-\overline{z-w}$
33. $\overline{z\cdot v}$
34. $\overline{w\cdot v}-\overline{z\cdot v}$
35. $\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{v}-v\right)$
36. $\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(\overline{w}\cdot w\right)$
37. $\left(\overline{v}-v\right)\left(\overline{z+w}\right)$
38. $\left(\overline{z-w}\right)\left(\overline{w-v}\right)$
39. $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{\overline{w+v}}}$
40. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{z-\overline{z}}$
41. $\dfrac{\overline{z\cdot w}}{\overline{\overline{z+w}}}$
42. $\dfrac{\overline{v}}{|v|^2}$
43. $\dfrac{\overline{v+w}}{|v+w|^2}$
44. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{z}-z\right)}$
45. $\dfrac{\overline{w+z}-\overline{v+w}}{\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(v\cdot\overline{v}\right)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 12

Ecuaciones de segundo grado

Reseña HISTÓRICA



Área $= x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

En la reseña del capítulo 2 se mencionó a al-Khwarizmi y su método geométrico para resolver ecuaciones de segundo grado, que se conoce como método de completar el cuadrado y consiste en lo siguiente:

Ejemplo

Sea la ecuación $x^2 + 4x = 45$

- Se comienza por construir un cuadrado de lado x, $ABCD$, cuya área será x^2.
- Se prolonga el lado AB y AD en 2 unidades, resultan 2 rectángulos; la suma de dichas áreas es $2x + 2x = 4x$, que da como resultado el segundo término de la ecuación.
- La figura se completa con un cuadrado de 2 unidades por lado, cuya área es $2 \cdot 2 = 4$ unidades cuadradas.
- El área total del cuadrado es $x^2 + 4x + 4$.
- Se suman 4 unidades cuadradas en ambos términos y se resuelve la ecuación.

$$x^2 + 4x = 45$$
$$x^2 + 4x + 4 = 45 + 4$$
$$(x + 2)^2 = 49$$

Por tanto, una solución es $x = 5$.

Definición

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx lineal, c es el término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

$$\text{Ecuaciones de segundo grado}\begin{cases}\text{Completas: } ax^2 + bx + c = 0\\ \text{Incompletas: }\begin{cases}\text{Mixtas: } ax^2 + bx = 0, \text{ con } c = 0\\ \text{Puras: } ax^2 + c = 0, \text{ con } b = 0\end{cases}\end{cases}$$

Solución de una ecuación de segundo grado completa

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces.

Existen tres métodos para resolver una ecuación de segundo grado:

Completando el trinomio cuadrado perfecto

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se suman, en ambos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Solución

Se dejan los términos en x en el primer miembro de la ecuación.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -3$$

Se suma $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ en ambos miembros $\quad x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x+2)^2 = 1$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros $\quad x + 2 = \pm\sqrt{1}$

$x + 2 = \pm 1$

Se despeja a la incógnita $\quad x = -2 \pm 1$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = -2 + 1 = -1 \text{ o } x_2 = -2 - 1 = -3$$

Por tanto, las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = -1$ o $x_2 = -3$

2 Determina las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x - 27 = 0$.

Solución

Se dejan los términos en x en el primer miembro y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 27$$

se suma $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ en ambos miembros $\quad x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x-3)^2 = 36$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros, $\quad x - 3 = \pm\sqrt{36}$

$x - 3 = \pm 6$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = 3+6 = 9 \text{ o } x_2 = 3-6 = -3$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 9$ o $x_2 = -3$

3 Encuentra las raíces de la ecuación: $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Solución

El término independiente se coloca del lado derecho del signo igual y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x = 6$$

Se suma $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ en ambos miembros $\quad x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 6 + \frac{25}{4}$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Se aplica raíz cuadrada $\quad x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ o } x_2 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -1 \text{ o } x_2 = 6$$

4 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solución

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -5$$

$$x^2 + 4x + 4 = -5 + 4$$

$$(x+2)^2 = -1$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{-1}$$

$$x + 2 = \pm i$$

$$x = -2 \pm i$$

de la igualdad se obtienen los valores de x, que son los números complejos:

$$x_1 = -2 + i \text{ o } x_1 = -2 - i$$

5 Resuelve la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solución

Se divide la ecuación entre 2 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Se suma $\left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ en ambos miembros $\quad x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$

(*continúa*)

(*continuación*)

se factoriza el miembro izquierdo, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros. $x+\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

$$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{5}{4}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=-3$

6 Determina las soluciones de la ecuación $3x^2-5x+2=0$.

Solución

Se dividen ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 3,

$$3x^2-5x+2=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

En la ecuación resultante se completa el trinomio cuadrado perfecto y se despeja x.

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=-\frac{2}{3}+\frac{25}{36}$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1=1$ o $x_2=\frac{2}{3}$

7 Encuentra las raíces de la ecuación $6x^2-11xy+3y^2=0$, con y como una constante.

Solución

Se divide la ecuación entre 6 y se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{3}{6}y^2=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{11}{6}xy=-\frac{3}{6}y^2$$

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{121}{144}y^2=-\frac{3}{6}y^2+\frac{121}{144}y^2$$

$$\left(x-\frac{11}{12}y\right)^2=\frac{49}{144}y^2$$

$$x-\frac{11}{12}y=\pm\frac{7}{12}y$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son:

$$x_1=\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{18}{12}y=\frac{3}{2}y,\quad x_2=-\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{4}{12}y=\frac{1}{3}y$$

EJERCICIO 120

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado y completa el trinomio cuadrado perfecto, donde *x*, *y*, *z* y *w* son variables y *a* y *b* constantes.

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $6x - 27 = -x^2$
3. $x^2 + 11x + 30 = 0$
4. $y^2 + 10 = 6y$
5. $w^2 - 40 = 3w$
6. $z^2 - 30 = 13z$
7. $x^2 - 10x + 24 = 0$
8. $x^2 + 8x = 240$
9. $2x + 5 = -x^2$
10. $3x^2 = x + 2$
11. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
12. $10w^2 - 13w - 3 = 0$
13. $-3x^2 + 7x + 6 = 0$
14. $36x = 13 + 36x^2$
15. $4x^2 + 5bx = -b^2$
16. $-32aw - 15a^2 = -7w^2$
17. $x^2 + 3bx - 10b^2 = 0$
18. $b^2x^2 = bx + 30$
19. $a^2y^2 + 3aby + 2b^2 = 0$
20. $27ay - 14y^2 = 10a^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula general

Deducción de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado

Sea la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación se divide entre *a*,

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

El término independiente se coloca en el segundo miembro

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

se factoriza el lado izquierdo, y se realiza la resta en el segundo miembro

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

se realiza el despeje para *x*,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Solución

Se identifican los valores de a, b y c de acuerdo con la ecuación dada.

$$a = 3,\ b = -5,\ c = -2$$

Se sustituyen en la fórmula general.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Para concluir, las raíces son:

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ o } x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2 Determina las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-0}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{3 \pm 3}{4}$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ o $x_2 = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$

3 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$, se sustituyen los valores en la fórmula general,

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0+36}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

Por consiguiente, la soluciones son: $x_1 = -3$ o $x_2 = 3$

4 Determina las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$

EJERCICIO **121**

Emplea la fórmula general y encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 15 = 8x$
2. $x^2 = x + 6$
3. $x^2 + 6x = -8$
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$
5. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
6. $6x^2 + 13x - 5 = 0$
7. $5y^2 - 2y - 3 = 0$
8. $x^2 - 6x + 2 = 0$

9. $x^2 + 2x - 5 = 0$
10. $x^2 - 4x + 5 = 0$
11. $4x^2 = -4x - 17$
12. $36y^2 - 24y = -85$
13. $w^2 - 5w = 0$
14. $\frac{1}{3}z^2 + \frac{5}{6}z = 0$
15. $y^2 - \frac{1}{3}ay = 0$
16. $ax^2 - bx = 0$
17. $x^2 - 25 = 0$
18. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$
19. $a^2x^2 + b^2 = 0$
20. $a^2w^2 - 16 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado

La expresión $I = b^2 - 4ac$ es el discriminante de una ecuación de segundo grado, y permite determinar si las raíces son reales o imaginarias.

1. Si $I > 0$, las raíces son reales y diferentes.
2. Si $I = 0$, entonces las raíces son reales e iguales y su valor es: $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $I < 0$, entonces las raíces son complejas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el carácter de las raíces de la ecuación $20x^2 - x - 1 = 0$.

Solución

Al sustituir los valores de $a = 20$, $b = -1$, $c = -1$ en el discriminante, se obtiene:

$$I = (-1)^2 - 4(20)(-1) = 1 + 80 = 81$$

De acuerdo con el resultado $I > 0$, se deduce que la ecuación tiene 2 soluciones reales y diferentes.

2 Encuentra el carácter de las raíces de la ecuación $4y^2 - 8y + 7 = 0$.

Solución

Al sustituir los valores de $a = 4$, $b = -8$, $c = 7$ en el discriminante, se determina que:

$$I = (-8)^2 - 4(4)(7) = 64 - 112 = -48$$

En este caso $I < 0$, por tanto, las raíces son complejas.

EJERCICIO 122

Determina el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 6x + 16 = 0$
3. $\frac{4}{3}x^2 - 4x + \frac{10}{3} = 0$
4. $36x^2 - 60x + 25 = 0$
5. $4x^2 - 3x = 0$
6. $x^2 + 81 = 0$
7. $x^2 + 4x - 5 = 0$
8. $w^2 - 2w + 5 = 0$
9. $\sqrt{6}y^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)y - 1 = 0$
10. $x^2 + 6x + 9 = 0$
11. $x^2 - 4x + 5 = 0$
12. $\frac{1}{5}x^2 + 2x + 5 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factorización

Otra forma de resolver una ecuación de segundo grado es factorizando la expresión e igualando a cero cada factor, para posteriormente despejar a la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución

Con la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza el trinomio.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 5 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$
$$x = 5 \text{ o } x = 2$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 5$ o $x_2 = 2$

2 Determina para x la ecuación $x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$.

Solución

Se factoriza el trinomio.

$$x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$$
$$(x + 10a)(x + a) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación,

$$x + 10a = 0 \text{ o } x + a = 0$$
$$x = -10a \text{ o } x = -a$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -10a$ o $x_2 = -a$

3 Resuelve la ecuación $6x^2 - 7x - 3 = 0$.

Solución

Con la forma $ax^2 + bx + c$ se factoriza la expresión

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \rightarrow \frac{6\left(6x^2 - 7x - 3\right)}{6} = 0$$
$$\frac{36x^2 - 7\left(6x\right) - 18}{6} = 0$$
$$\frac{\left(6x - 9\right)\left(6x + 2\right)}{6} = 0$$

El denominador se descompone en sus factores primos $(6 = 3 \cdot 2)$

$$\frac{\left(6x - 9\right)\left(6x + 2\right)}{3 \cdot 2} = 0$$

Se realiza la simplificación

$$(2x - 3)(3x + 1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$2x - 3 = 0 \text{ o } 3x + 1 = 0$$
$$2x = 3 \text{ o } 3x = -1$$

Por tanto, las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2}$ o $x_2 = -\frac{1}{3}$

4 Determina las raíces de la ecuación $3x^2 + 19x - 14 = 0$.

Solución

Se aplica el factor por agrupación de términos y se factoriza la expresión.

$$3x^2 + 19x - 14 = 0$$

Se descompone $19x$ en $21x - 2x$, $\quad 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 0$

Se agrupan términos y se factoriza $\quad 3x(x + 7) - 2(x + 7) = 0$

$$(3x - 2)(x + 7) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$3x - 2 = 0 \text{ o } x + 7 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ o } x = -7$$

Finalmente, las raíces son: $x_1 = \frac{2}{3}$ o $x_2 = -7$

5 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 3\sqrt{2}\,x - 8 = 0$.

Solución

Se factoriza el trinomio,

$$x^2 - 3\sqrt{2}\,x - 8 = 0$$

$$\left(x - 4\sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 4\sqrt{2} = 0, \text{ o } x + \sqrt{2} = 0$$

$$x = 4\sqrt{2} \text{ o } x = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 4\sqrt{2}$ o $x_2 = -\sqrt{2}$

EJERCICIO 123

Emplea el método factorización y resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 5x - 6 = 0$
2. $x^2 + 11x + 24 = 0$
3. $y^2 - y - 20 = 0$
4. $x^2 = x + 90$
5. $-w^2 + 5w - 4 = 0$
6. $3y^2 - 11y + 10 = 0$
7. $3x^2 - x - 2 = 0$
8. $2y^2 = 4 - 7y$
9. $3x^2 - 6 = 7x$
10. $14x^2 - 33x - 5 = 0$
11. $20x^2 + 3x - 2 = 0$
12. $5z^2 = 17z - 14$
13. $10w^2 = 7w + 6$
14. $14x^2 + 17x - 6 = 0$
15. $-2x^2 = 7x - 15$
16. $6x^2 + 11bx = 10b^2$
17. $2x^2 + 2a^2b^2 = 5abx$
18. $a^2x^2 - 2ax - 3 = 0$
19. $a^2x^2 + abx = 6b^2$
20. $z^2 - \sqrt{3}z = 6$
21. $x^2 - 2\sqrt{3}x = 45$
22. $x^2 = 7\sqrt{7}x - 70$
23. $5y^2 + \frac{17}{6}y + \frac{1}{6} = 0$
24. $x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{6} = 0$
25. $w^2 - \frac{1}{15}w - \frac{2}{15} = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Solución de una ecuación de segundo grado incompleta

Mixtas

Tiene la forma $ax^2 + bx = 0$; para obtener las raíces de la expresión se aplica el factor común, y una de sus raíces siempre es cero.

EJEMPLOS

1 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$.

Solución

Se factoriza por factor común.

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x-5) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación de primer grado.

$$x = 0 \text{ o } x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 5$$

2 Determina las raíces de la ecuación $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$.

Solución

Se desarrollan los productos notables y se simplifica la expresión:

$$(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$$
$$x^2 - 6x + 9 - (4x^2 + 20x + 25) + 16 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 + 16 = 0$$
$$-3x^2 - 26x = 0$$

Se aplica factorización por factor común.

$$x(-3x - 26) = 0$$

Se iguala a cero cada factor.

$$x = 0 \text{ o } -3x - 26 = 0$$
$$-3x = 26$$
$$x = -\frac{26}{3}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = -\frac{26}{3}$$

EJERCICIO 124

Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $4x^2 - 8x = 0$
3. $5x - x^2 = 0$
4. $3x^2 + 2x = 0$
5. $x^2 - x = 0$
6. $7x^2 - 5x = 0$
7. $\frac{x-9}{6} + \frac{3}{2} - \frac{x^2}{3} = 0$
8. $(y+4)^2 = (4-y)(4+y)$
9. $\frac{x+4}{x+2} = \frac{8}{4-x}$
10. $5(x+3) - 5(x^2-1) = x^2 + 7(3-x) - 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Puras

Son de la forma $ax^2 + c = 0$, para obtener sus raíces o soluciones se despeja x o se factoriza la expresión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Solución

Se realiza el despeje para obtener los siguientes valores de x,

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Por tanto $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

2 Encuentra las soluciones de la ecuación $\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1}$.

Solución

Se eliminan los denominadores y se simplifica la expresión,

$$\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1} \rightarrow (2x-3)(x-1) = (x-2)(x-3)$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x + 2x - 6 = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$

se despeja a x,

$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \sqrt{3}$ o $x_2 = -\sqrt{3}$

3 ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $4x^2 - 1 = 0$?

Solución

Se factoriza la expresión como una diferencia de cuadrados, se iguala a cero cada factor y se despeja x.

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow (2x-1)(2x+1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \;;\; 2x + 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ o } x_2 = -\frac{1}{2}$$

4 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 + 4 = 0$.

Solución

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \pm 2i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 2i \text{ o } x_2 = -2i$$

5 Encuentra las soluciones de la ecuación $2x^2 + 162 = 0$.

Solución

$$2x^2 + 162 = 0 \rightarrow 2x^2 = -162$$
$$x^2 = -81$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos miembros $x = \pm\sqrt{-81}$

$$x = \pm 9i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -9i \text{ o } x_2 = 9i$$

EJERCICIO 125

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $1 - x^2 = 0$
3. $w^2 - 100 = 0$
4. $3x^2 - 192 = 0$
5. $4y^2 - 12 = 0$
6. $16x^2 - a^2 = 0$
7. $25z^2 - 36 = 0$
8. $135 = (2y + 3)(2y - 3)$
9. $(w + 2)(2w - 1) = (w - 2)(w + 5) + 15$
10. $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-3}{2x-3}$
11. $3\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{3}}$
12. $2 + \dfrac{3}{(2x+1)(2x-1)} = 3$
13. $y^2 + 16 = 0$
14. $w^2 + 25 = 0$
15. $x^2 + 1 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Existen diversos problemas cuya solución se obtiene al plantear y resolver una ecuación de segundo grado.

1 La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

Solución

Primer número: x
Segundo número: $18 - x$

Ecuación:

$$x^2 + (18 - x)^2 = 180$$
$$x^2 + 324 - 36x + x^2 - 180 = 0$$
$$2x^2 - 36x + 144 = 0 \quad \text{al dividir entre 2}$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación}$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$x - 12 = 0 \text{ o } x - 6 = 0 \quad \text{cada factor se iguala con cero}$$
$$x = 12 \text{ o } x = 6$$

Finalmente, tenemos que los números son 12 y 6

2 En t segundos la altura h, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 320 m sobre el nivel del suelo?

Solución

Con la ecuación $h = 80t - 5t^2$, se obtiene la altura del proyectil en cualquier instante.

Para determinar el tiempo que tarda el proyectil en tener una altura de 320 m, este valor se evalúa en la ecuación dada, es decir:

$$h = 80t - 5t^2$$
$$320 = 80t - 5t^2$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve para t

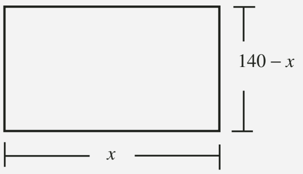
$$320 = 80t - 5t^2 \quad \text{se iguala con cero}$$
$$5t^2 - 80t + 320 = 0 \quad \text{se divide entre 5}$$
$$t^2 - 16t + 64 = 0$$
$$(t - 8)^2 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$t - 8 = 0 \quad \text{se extrae raíz en ambos miembros}$$
$$t = 8 \quad \text{se obtiene el valor de } t$$

por tanto, el proyectil tardará 8 segundos en estar a 320 m sobre el nivel del suelo.

3 Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 m y su área es de 4 000 m^2.

Solución

2(base) + 2(altura) = perímetro
$2x$ + 2(altura) = 280
x + (altura) = 140
altura = $140 - x$



El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$\text{Área: } x(140 - x) = 4\,000$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.

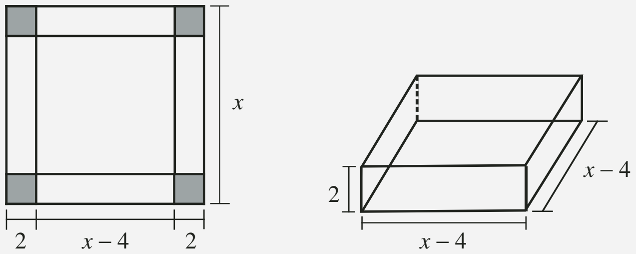
$$x(140 - x) = 4\,000$$
$$140x - x^2 - 4\,000 = 0$$
$$-x^2 + 140x - 4\,000 = 0 \quad \text{al multiplicar por } -1$$
$$x^2 - 140x + 4\,000 = 0 \quad \text{se obtiene una ecuación de segundo grado}$$
$$(x - 40)(x - 100) = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación y se obtiene:}$$
$$x - 40 = 0 \text{ o } x - 100 = 0$$
$$x = 40 \text{ o } x = 100$$

De acuerdo con lo anterior, las dimensiones del rectángulo son 40 y 100 metros.

4 A partir de una pieza cuadrada de hoja de lata, se desea construir una caja con base cuadrada y sin tapa, quitando cuadrados en las esquinas de 2 cm por lado y doblando hacia arriba los lados; si la caja debe tener 98 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones de la pieza de hoja de lata que deberá usarse?

Solución

Se construye una figura con los datos que se proporcionaron.



El volumen de la caja es:

$V = (\text{Alto})(\text{Largo})(\text{Ancho})$
$V = 2(x - 4)(x - 4) = 2(x - 4)^2 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2x^2 - 16x + 32$, entonces
$V = 98 = 2x^2 - 16x + 32$, se obtiene una ecuación de segundo grado.

Se resuelve la ecuación:

$$2x^2 - 16x + 32 = 98$$
$$2x^2 - 16x + 32 - 98 = 0$$
$$2x^2 - 16x - 66 = 0 \quad \text{se divide entre 2}$$
$$x^2 - 8x - 33 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$(x - 11)(x + 3) = 0$$

Los valores son: $x = 11$ o $x = -3$, la longitud de los lados de la hoja de lata no pueden ser negativos.
Finalmente, la longitud del cuadrado es de 11 cm por lado.

5 Un comerciante compró determinado número de pelotas con \$720 y vendió algunas, excepto 18, ganó \$6 en cada una. Sabía que con el dinero de la venta podría haber comprado 3 pelotas más que antes, calcula el precio de cada pelota.

Solución

Precio de compra de cada pelota: x

Número de pelotas: $\frac{720}{x}$

Precio de venta de cada pelota: $x + 6$

Total de la venta: $\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6)$

Número de pelotas compradas con el total de la venta: $\frac{720}{x} + 3$

Costo de la compra de 3 pelotas más: $x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$

Ecuación:

$$\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6) = x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$$

$$\left(\frac{720 - 18x}{x}\right)(x+6) = x\left(\frac{720 + 3x}{x}\right)$$

$$\frac{(720 - 18x)(x+6)}{x} = \frac{x(720 + 3x)}{x}$$

$$720x + 4\ 320 - 18x^2 - 108x = 720x + 3x^2$$

$$21x^2 + 108x - 4\ 320 = 0 \qquad \text{al dividir entre 3}$$

$$7x^2 + 36x - 1\ 440 = 0$$

Se aplica la fórmula general,

$$x = \frac{-(36) \pm \sqrt{(36)^2 - 4(7)(-1\ 440)}}{2(7)} = \frac{-36 \pm \sqrt{41\ 616}}{14} = \frac{-36 \pm 204}{14}$$

Entonces, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-36 - 204}{14} = -\frac{240}{14} = -\frac{120}{7} \text{ o } x_2 = \frac{-36 + 204}{14} = \frac{168}{14} = 12$$

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -\frac{120}{7}$ *o* $x_2 = 12$, pero el precio de un artículo no puede ser negativo, por tanto, el precio de cada pelota es \$12.

EJERCICIO 126

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra 2 números enteros que sumen 42 y cuyo producto sea 405.
2. Encuentra 2 números naturales que su producto sea 360 y el cociente del mayor entre el menor sea $\frac{5}{2}$.
3. Encuentra 3 números consecutivos impares, cuya suma de sus cuadrados sea 83.
4. Encuentra 3 números enteros consecutivos pares, cuya suma de sus cuadrados sea 596.

5. La suma de un número y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Halla los números.

6. La suma de 2 números es 25 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{4}$. Encuentra los números.

7. Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000 m^2 de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 m de cerca?

8. La base de un triángulo es 3 veces su altura. Su área es de 150 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de la base y la altura?

9. Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya superficie es de 6 m^2, perímetro de 12 m e hipotenusa de 5 m.

10. Se desea construir un recipiente, sin tapa, de fondo cuadrado y lados rectangulares, con una altura de 6 m, si el material para el fondo cuesta \$800 por metro cuadrado y el de los lados \$1 200, ¿cuál es el volumen que se puede obtener con \$128 000?

11. Determina las dimensiones de un rectángulo cuya altura es $\frac{1}{3}$ de su base y su área es de 972 cm^2.

12. Alejandro tiene 4 años más que Alfredo y el cuadrado de la edad de Alejandro, aumentado en el cuadrado de la edad de Alfredo, equivalen a 80 años. Encuentra las edades de Alejandro y Alfredo.

13. El cuadrado de un número disminuido en 13 equivale al exceso de 50 sobre el doble del número. Determina dicho número.

14. En cierto parque de la Ciudad de México se desea plantar 195 árboles, de tal manera que el número de éstos por fila exceda en 2 al número de filas. Determina la cantidad de filas, así como el número de árboles por fila.

15. Un productor de conservas en almíbar desea envasar su producto en una lata cilíndrica, cuya altura es de 8 centímetros y su volumen de 128 π cm^3. Encuentra el radio de la lata.

16. Mario va a construir una caja sin tapa, cuyo volumen debe ser de 312 cm^3; utilizará una lámina rectangular en la cual cortará cuadrados de 2 centímetros por lado en las esquinas. Si él sabe que la superficie total de la hoja al quitar los cuadrados es de 256 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones de dicha hoja?

17. La edad actual de Ricardo son trece medios de la edad de su hijo, el próximo año su edad será igual al cuadrado de la edad de su hijo disminuido en 9 años. Determina la edad actual de Ricardo.

18. Un famoso jugador de béisbol lanza una pelota verticalmente hacia arriba, tan fuerte como le es posible. La altura que alcanza la pelota después de t segundos la determina la ecuación $h = 40t - 8t^2$. ¿Cuánto tiempo le llevará a la pelota regresar al suelo?

19. En t segundos la altura h en pies, sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 240t - 16t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 900 ft sobre el nivel del suelo?

20. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una, por separado, para llenarlo si una tarda 16 h más que la otra?

21. Una persona gastó \$2 000 en regalos, obsequió 30 a sus familiares y amigos, el resto los vendió y ganó \$10 por regalo. Una vez vendidos todos los obsequios, se dio cuenta de que podía comprar la misma cantidad inicial de regalos y 5 más. ¿Cuál es el costo de cada presente?

22. Encuentra las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, si su perímetro es de 24 unidades y su área es de 24 unidades cuadradas.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función cuadrática

La función cuadrática es una función polinomial de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c y $x \in R$ con $a \neq 0$

Análisis de una función cuadrática

1. La función cuadrática representa una parábola, la cual puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo, depende del coeficiente del término cuadrático.
2. La función toma su valor máximo o mínimo en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, el cual se llama vértice de la parábola.
3. Si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa el punto mínimo de la función.
4. Si $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa el punto máximo de la función.
5. Si la gráfica interseca al eje X en 2 puntos, éstos se conocen como soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; si es tangente, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sólo tiene una raíz cuyo valor es $-\frac{b}{2a}$, en caso de que la función no interseque al eje de las X, entonces las raíces no son reales.

EJEMPLOS

Ejemplos

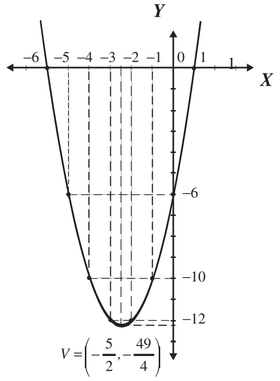
1 Grafica $y = x^2 + 5x - 6$ e indica las raíces.

Solución

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, los cuales se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
-6	0
-5	-6
-4	-10
-3	-12
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{49}{4}$
-2	-12
-1	-10
0	-6
1	0



La parábola corta el eje de las X en los valores $x = -6$ y $x = 1$
Por tanto, las raíces son: $x = -6$ o $x = 1$

2 Encuentra las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = x^2 - 4x + 4$.

Solución

Se identifican los valores de a, b y c y se sustituyen en la fórmula,

$$a = 1,\ b = -4,\ c = 4$$

Se observa que el valor de a es mayor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa un punto mínimo.

Para determinar las coordenadas del vértice se utiliza la fórmula

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(continúa)

(*continuación*)

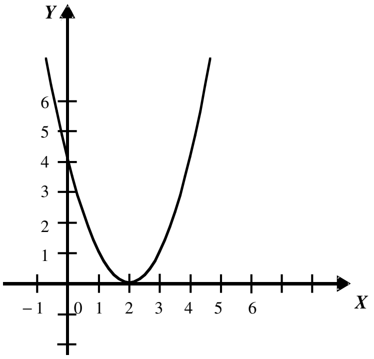
Al sustituir los valores en la fórmula se obtiene:

$$V\left(-\frac{(-4)}{2(1)},\frac{4(1)(4)-(4)^2}{4(1)}\right)=V(2,0)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, los que se sustituirán en la función.

Tabla de valores

x	y
− 1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9



La parábola interseca en un solo punto del eje de las X, es decir, la parábola es tangente al eje X.
Por tanto, la raíz de la ecuación es $x = 2$

3 Determina las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = -x^2 + 2x - 4$

Solución

Se identifican los valores de a, b y c y se sustituyen en la fórmula,

$$a = -1,\ b = 2,\ c = -4$$

Se observa que el valor de a es menor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa un punto máximo.

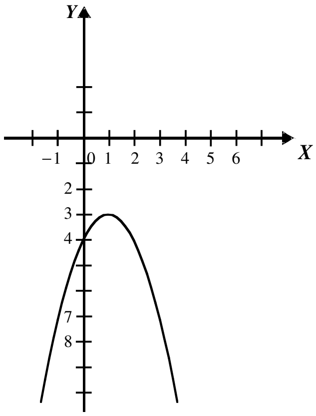
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=V\left(-\frac{(2)}{2(-1)},\frac{4(-1)(-4)-(2)^2}{4(-1)}\right)=V(1,\ -3)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, que se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
− 2	− 12
− 1	− 7
0	− 4
1	− 3
2	− 4
3	− 7
4	− 12



La parábola no interseca al eje X.
Por consiguiente, las raíces no son reales

EJERCICIO 127

Encuentra las coordenadas del vértice y determina las raíces de las siguientes funciones:

1. $y = 2x^2 - 8x + 6$
2. $y = -2x^2 + 2x + 12$
3. $y = x^2 - x - 20$
4. $y = x^2 + 4x - 3$
5. $y = x^2 + 2x + 5$
6. $y = x^2 - 2x + 1$
7. $y = x^2 - 4x + 13$
8. $y = 10x - 25 - x^2$
9. $y = -9 - x^2$
10. $y = 2x^2 - 6x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para encontrar la solución óptima (máximo o mínimo) de un problema, es necesario plantear una función cuadrática; la abscisa del vértice representa el valor que optimiza a la función y la ordenada el valor óptimo.

1 Encuentra 2 números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Solución

Primer número = x
Segundo número = $20 - x$
Producto = $(x)\,(20 - x)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)\,(20 - x) = 20x - x^2$

La gráfica de la función representa una parábola cóncava hacia abajo, entonces el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un valor máximo.

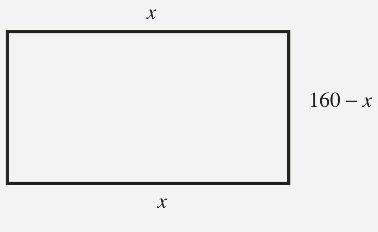
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = -\frac{20}{-2} = 10$$

Si x es 10, entonces el valor de $20 - x$, es 10
Por tanto, los valores son 10 y 10

2 Un granjero desea cercar un terreno rectangular y dispone de 320 m de alambre, ¿qué dimensiones debe tener el terreno para que su área sea máxima?

Solución

Se determinan las dimensiones en términos de una variable,
2 (base) + 2 (altura) = perímetro
$2x$ + 2 (altura) = 320
x + (altura) = 160
altura = $160 - x$



El área es el producto de la base por la altura, se hace el producto y con esto se obtiene la función $A(x)$.

$$A(x) = x(160 - x)$$
$$A(x) = 160x - x^2$$

La ecuación representa una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un área máxima.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2(-1)} = -\frac{160}{-2} = 80$$

Se deduce que las dimensiones del terreno son 80 metros de largo por 80 de ancho.

3 Encuentra dos números enteros cuya diferencia es 12 y cuyo producto sea mínimo.

Solución

Primer número: x
Segundo número: $x + 12$
Producto = $(x)\,(x + 12)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)\,(x + 12) = x^2 + 12x$

La función representa una parábola cóncava hacia arriba, entonces el vértice será el punto mínimo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un valor mínimo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(12)}{2(1)} = -\frac{12}{2} = -6$$

Si x es -6, entonces el valor de $12 + x$, es 6
Por tanto, los valores son 6 y -6

EJERCICIO 128

Plantea funciones cuadráticas y resuelve los siguientes problemas.

1. Encuentra 2 números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea 20 y su producto sea mínimo.
3. La suma de 2 números es 40, ¿cuáles son los números si la suma de sus cuadrados es un valor mínimo?
4. Se quiere cercar un terreno rectangular con 220 metros de alambre. Encuentra las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.
5. Se arroja una pelota con una velocidad de 96 pies por segundo, la altura s que alcanza en un tiempo t lo determina la siguiente ecuación: $s = 96t - 32t^2$. Calcula la altura máxima que alcanza.
6. De una hoja rectangular de 76 cm de perímetro se cortan cuadrados de 2 cm por lado para construir una caja sin tapa. Determina las dimensiones de la hoja para obtener el volumen máximo.
7. Una editorial vende a los expendios de revistas una publicación científica a $60 el ejemplar, y cada 50 ejemplares que excedan los 500, el precio de venta disminuye $2, ¿cuántos ejemplares extras debe adquirir un expendio para que la editorial tenga un ingreso máximo?
8. Una juguetería vende x pelotas a p pesos con $p = 150 - 4x$, el costo de producción de x pelotas es $C = 70x - 2x^2$. Determina el número de pelotas que debe vender la juguetería para obtener una ganancia máxima.
9. Un fabricante de lápices distribuye a las papelerías 30 cajas con 100 lápices cada una a un precio de $0.80 por lápiz, y por cada caja que exceda las 30 el precio de venta disminuye en 2 centavos por lápiz. ¿Cuántas cajas debe vender el fabricante a las papelerías para obtener ingresos máximos?
10. Un trozo de alambre de 100 cm se parte en dos trozos, un de ellos se dobla para formar un triángulo equilátero, y el trozo restante se dobla para formar un cuadrado, ¿cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y cuadrado sea mínima?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación entre las raíces de una ecuación de segundo grado

Entre los coeficientes y las raíces de una ecuación de segundo grado existen dos relaciones, la suma y el producto.

Sean las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Entonces, la suma de las raíces es:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{(2a)^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Por tanto, el producto de las raíces es:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el valor de la suma de las raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1$$

Por consiguiente, $x_1 + x_2 = -1$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

$x_1 + x_2 = -3 + 2 = -1$

2 Encuentra el valor del producto de las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1,\ b = -6,\ c = 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{1} = 9$$

Por tanto, $x_1 \cdot x_2 = 9$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

$(x_1)(x_2) = (3)(3) = 9$

EJERCICIO 129

Determina el valor de la suma y el producto de las raíces mediante la relación entre ellas.

1. $4x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 - 25 = 0$
3. $x^2 - x = 0$
4. $3x^2 + 8x = 0$
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$
6. $x^2 + 4x + 3 = 0$
7. $-x^2 + x + 12 = 0$
8. $2x^2 + x - 1 = 0$
9. $9x^2 + 27x + 14 = 0$
10. $x^2 + 7ax + 12a^2 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Deducción de una ecuación de segundo grado dadas las raíces

Sean x_1, x_2, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -b \text{ y } x_1 \cdot x_2 = c$$

Por tanto, la ecuación es:

$$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación de segundo grado, si las raíces son: -3, 5.

Solución

Se determina x_1, x_2, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = -3 \text{ o } x_2 = 5$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - (-3 + 5)x + (-3)(5) = 0 \quad \text{se simplifica}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

2 Encuentra la ecuación de segundo grado, si las raíces son: $1 - 4i$, $1 + 4i$.

Solución

Se determina x_1, x_2, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = 1 - 4i \text{ o } x_2 = 1 + 4i$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - [(1-4i)+(1+4i)]x + [(1-4i)(1+4i)] = 0$$

Se simplifican las operaciones $\quad x^2 - 2x + 17 = 0$

Finalmente, la ecuación es: $x^2 - 2x + 17 = 0$

3 Determina la ecuación de segundo grado, si sus raíces son: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$.

Solución

Se sustituyen en la fórmula $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$

$$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1\cdot x_2)=0$$
$$x^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)=0$$
$$x^2+\frac{3}{20}x-\frac{2}{20}=0 \qquad \text{se multiplica por 20}$$
$$20x^2+3x-2=0$$

Por consiguiente, la ecuación es:

$$20x^2+3x-2=0$$

EJERCICIO 130

Determina la ecuación de segundo grado, que tiene como raíces los valores dados.

1. $3, -3$
2. $-7, 0$
3. $4i, -4i$
4. $4, 1$
5. $-5, -3$
6. $-2+5i, -2-5i$
7. $\frac{1}{2}, 2$
8. $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{5}$
9. $b, -3b$
10. $2a, 5a$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones con radicales

En este tipo de ecuaciones se recomienda despejar de la expresión un radical, que se eleva al cuadrado la igualdad para que se genere una ecuación de primero o segundo grado; en caso de que existan dos o más radicales, se repite lo anterior.

EJEMPLOS

1 Resuelve la ecuación $\sqrt{x-5}-4=0$.

Solución

Se despeja el radical y se elevan ambos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x-5}=4 \rightarrow \left(\sqrt{x-5}\right)^2=(4)^2 \rightarrow x-5=16 \rightarrow x=16+5$$
$$x=21$$

2 Resuelve $\sqrt{3x^2-4x+1}=x+1$.

Solución

Se elevan ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2-4x+1}\right)^2=(x+1)^2$$

(continúa)

(*continuación*)

Se realizan las operaciones y se simplifican los términos

$$3x^2-4x+1=x^2+2x+1$$
$$3x^2-4x-x^2-2x-1+1=0$$
$$2x^2-6x=0$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado y se factoriza para resolver:

$$2x(x-3)=0$$
$$2x=0 \text{ o } x-3=0$$
$$x=0 \text{ o } x=3$$

Por tanto, las soluciones son: $x=0$ o $x=3$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$.

Solución

Se despeja uno de los radicales,

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4 \;\rightarrow\; \sqrt{x+3}=4-\sqrt{5x-1}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(4-\sqrt{5x-1}\right)^2 \;\rightarrow x+3=16-8\sqrt{5x-1}+\left(\sqrt{5x-1}\right)^2$$
$$x+3=16-8\sqrt{5x-1}+5x-1$$
$$x+3-5x+1-16=-8\sqrt{5x-1}$$
$$-4x-12=-8\sqrt{5x-1}$$

se divide por -4, $\quad x+3=2\sqrt{5x-1}$

Para eliminar la raíz, de nuevo se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$(x+3)^2=\left(2\sqrt{5x-1}\right)^2 \;\rightarrow x^2+6x+9=4(5x-1)$$
$$x^2+6x+9=20x-4$$
$$x^2-14x+13=0$$
$$(x-13)(x-1)=0$$
$$x-13=0 \quad \text{o} \quad x-1=0$$
$$x=13 \quad \text{o} \quad x=1$$

Se sustituyen los valores que se obtienen en la ecuación dada; si la igualdad no se cumple o se obtienen radicandos negativos, entonces la solución no se admite.

Comprobación

Si $x=13$

$$\sqrt{13+3}+\sqrt{5(13)-1}=4$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{64}=4$$
$$4+8=4$$
$$12\neq 4$$

Si $x=1$

$$\sqrt{1+3}+\sqrt{5(1)-1}=4$$
$$\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$$
$$2+2=4$$
$$4=4$$

Por consiguiente, $x=13$ no es solución, finalmente, $x=1$ sí es solución.

EJERCICIO 131

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x}-5=2$
2. $\sqrt{1-x}=3$
3. $\sqrt{2x-4}-3=0$
4. $\sqrt{9-x}=x-3$
5. $7=x+\sqrt{x-1}$
6. $\sqrt{2x+5}-x=1$
7. $2x=5+\sqrt{4-x}$
8. $\sqrt{x+2}+x=10$
9. $\sqrt{4x+13}+2x=1$
10. $\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-1}=3$
11. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$
12. $\sqrt{x+3}-\sqrt{8x+1}=-1$
13. $2+4\sqrt{x}=\sqrt{16x+5}$
14. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}=1$
15. $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-1$
16. $\sqrt{2-x}+\sqrt{11+x}=5$
17. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=\sqrt{2}$
18. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3+\sqrt{10}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de ecuaciones cuadráticas

Geométricamente este tipo de sistemas de ecuaciones se generan cuando se intersecan una recta y una curva con ecuación cuadrática (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) o dos ecuaciones cuadráticas; la solución que satisface ambas ecuaciones son los puntos de intersección.

Procedimiento para la resolución de un sistema de ecuaciones cuadrático-lineal con dos incógnitas

1. De la ecuación lineal se despeja una incógnita.
2. El valor de la incógnita que se despejó se sustituye en la misma incógnita de la ecuación cuadrática, y se obtiene una ecuación cuadrática con una sola incógnita.
3. Se obtienen las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática, posteriormente éstos se evalúan en el despeje, obteniendo los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

Solución

Se despeja de la ecuación lineal $x+y-2=0$ una de las incógnitas,

$$x=2-y$$

se sustituye en la ecuación cuadrática la incógnita despejada y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2+y^2=10 \quad \rightarrow (2-y)^2+y^2&=10 \\ 4-4y+y^2+y^2-10&=0 \\ 2y^2-4y-6&=0 \\ y^2-2y-3&=0 \\ (y-3)(y+1)&=0 \\ y=3 &\quad \text{o} \quad y=-1 \end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se sustituyen los valores de $y = 3$, $y = -1$ en $x = 2 - y$, se obtiene:

$$\text{Si } y = 3,\ x = 2 - 3 = -1,\ \text{si } y = -1,\ x = 2 - (-1) = 3$$

Por tanto, la solución del sistema son los puntos:

$$(-1, 3) \text{ y } (3, -1)$$

Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimina una de las dos incógnitas.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado que se obtuvo en el punto anterior.
3. Para concluir, las raíces obtenidas se evalúan en alguna de las dos ecuaciones originales, para obtener los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Solución

Al aplicar el método de reducción, se multiplica por 3 la segunda ecuación,

$$\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 9x^2 - 3y^2 = 9 \\ \hline 10x^2 = 40 \end{array}$$

al resolver la ecuación, se determina que,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Estos resultados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de y.

$$\text{Si } x = 2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Si } x = -2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(-2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Finalmente, las soluciones son:

$$(2, 3), (2, -3), (-2, 3) \text{ y } (-2, -3)$$

Procedimiento para la resolución de un sistema cuadrático mixto

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimine el término independiente.
2. Del punto anterior se obtiene una ecuación cuadrática con dos incógnitas igualada a cero, la cual se factoriza.
3. Cada uno de los factores se igualan a cero y se despeja una de las dos incógnitas, quedando una en función de la otra.
4. Los despejes anteriores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, lo que genera una ecuación de segundo grado con una incógnita.
5. Se determinan las raíces de la ecuación de segundo grado y se evalúan en su respectiva igualdad obtenida en el paso 3, finalmente se obtienen los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2a^2-3ab+b^2=15 \\ a^2-2ab+b^2=9 \end{cases}$$

Solución

Se elimina el término independiente,

$$\begin{array}{r} 3\left(2a^2-3ab+b^2=15\right) \\ -5\left(a^2-2ab+b^2=9\right) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6a^2-9ab+3b^2=45 \\ -5a^2+10ab-5b^2=-45 \\ \hline a^2+ab-2b^2=0 \end{array}$$

La ecuación resultante se resuelve para a:

$$(a+2b)(a-b)=0$$
$$a=-2b \quad \text{o} \quad a=b$$

Se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve para b, y se determina que,

$$\text{si } a=-2b\text{, entonces } (-2b)^2-2(-2b)(b)+b^2=9$$
$$9b^2=9$$
$$b=\pm 1$$

$$\text{si } a=b\text{, entonces } (b)^2-2(b)(b)+b^2=9$$
$$0\neq 9$$

Para $a=b$, la ecuación es inconsistente.
Se calculan los valores de a sustituyendo $b=1$ y $b=-1$, en la relación,

$$a=-2b$$

Por consiguiente, las soluciones en el orden (a, b) son:

$$(-2, 1), (2, -1)$$

EJERCICIO 132

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2-4y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ a+b=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2-y^2=9 \\ x+y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=8 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x-y=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -w^2+wz-z^2+7=0 \\ w=2z-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} b^2+3a^2=57 \\ -a^2-3b^2=-43 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x^2-2y^2=1 \\ 9x^2+2y^2=1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} a^2-b^2=-28 \\ a^2+b^2=36 \end{cases}$

10. $\begin{cases} a^2+ab+b^2=49 \\ a^2-ab-2b^2=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+\frac{7}{2}xy-\frac{1}{2}y^2=42 \\ x^2+xy+2y^2=32 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a^2+2b^2=27 \\ -b^2-ab=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} w^2+2wz+z^2=4 \\ w^2+3wz-4=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} a^2-2ab-b^2=-7 \\ a^2-3ab+b^2=-5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3w^2+2wz+2z^2=18 \\ 6w^2+3wz+2z^2=24 \end{cases}$

16. $\begin{cases} a^2-ab=-\frac{1}{4}b^2 \\ 3a^2-b^2+9=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6m^2-6mn+3n^2-15=0 \\ m^2+\frac{7}{2}n^2=\frac{60}{8} \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2p^2-3pq+q^2=15 \\ \frac{1}{3}p^2-\frac{2}{3}pq+\frac{1}{3}q^2=3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10r^2-15rs-5s^2-10=0 \\ -r^2+\frac{5}{3}rs-\frac{1}{3}s^2=-1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} ab+6a^2=10 \\ 8a^2-6ab-4b^2+80=0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 13

Desigualdades

Reseña HISTÓRICA

Thomas Harriot (1560-1621)

Ingresó a la Universidad de Oxford en el año 1577, cuando tenía 17 años de edad.

Fue un excelente astrónomo y el primer inglés que tuvo un telescopio, además, uno de los primeros que observó y habló de las manchas solares con lo que rompió en definitiva con la antigua concepción de la perfección solar.

A lo largo de su vida escribió miles de páginas detallando sus estudios y observaciones en campos tan diversos como la óptica, la química, la balística, la astronomía y las matemáticas. Diez años después de su muerte editaron su tratado sobre ecuaciones, en el que se pone de manifiesto su destreza en la resolución de algunas ecuaciones de tercer y cuarto grado.

En este tratado de álgebra se dan algunas novedades en la notación. Una de ellas es el empleo de los signos **menor que** y **mayor que** empleados en la actualidad. Muchos matemáticos, por tanto, le han atribuido la paternidad de los signos **<** y **>**.

Thomas Harriot (1560-1621)

Definición

Es la relación de orden que existe entre dos cantidades y se representa con los símbolos menor que (<) y mayor que (>).

Dada la expresión $3x - 2 < 8$, donde x es una variable, su solución es encontrar el conjunto de valores que la satisfagan, si esto ocurre recibe el nombre de conjunto solución de la desigualdad.

Ejemplo

Verifica cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, son soluciones de la desigualdad $3x - 2 < 8$.

Solución

Se sustituye cada valor en la desigualdad:

Para $x = -3$

$3(-3) - 2 < 8$

$-9 - 2 < 8$

$-11 < 8$ Desigualdad verdadera

Para $x = 2$

$3(2) - 2 < 8$

$6 - 2 < 8$

$4 < 8$ Desigualdad verdadera

Para $x = 4$

$3(4) - 2 < 8$

$12 - 2 < 8$

$10 < 8$ Desigualdad falsa

Para $x = 5$

$3(5) - 2 < 8$

$15 - 2 < 8$

$13 < 8$ Desigualdad falsa

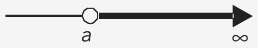
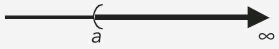
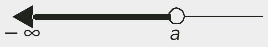
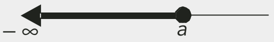
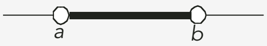
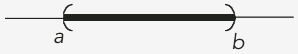
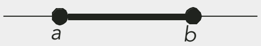
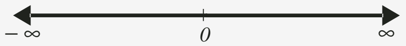
En este ejemplo los valores que hicieron verdadera la desigualdad son soluciones de la expresión.

Propiedades de las desigualdades

Sean $a, b, c \in R$.

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Tabla de desigualdades

Desigualdad	Intervalo	Gráfica 1	Gráfica 2
$x > a$	(a, ∞)		
$x < a$	$(-\infty, a)$		
$x \geq a$	$[a, \infty)$		
$x \leq a$	$(-\infty, a]$		
$a < x < b$	(a, b)		
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		
$a < x \leq b$	$(a, b]$		
$a \leq x < b$	$[a, b)$		
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$		

Nota: (a, b) es un intervalo abierto, $[a, b]$ es cerrado y $(a, b]$ o $[a, b)$ semiabierto o semicerrado.

Desigualdad lineal con una variable

Para determinar el conjunto solución de una desigualdad, se procede de la misma manera como en una ecuación lineal: se despeja la variable y se toman en consideración las propiedades de las desigualdades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la desigualdad $6x - 10 > 3x + 5$.

Solución

Al despejar x se agrupan todos los términos que contengan la variable en uno de sus miembros, y los términos independientes en el otro, finalmente, se simplifica.

$$6x - 10 > 3x + 5 \quad \rightarrow \quad 6x - 3x > 5 + 10$$

$$3x > 15 \qquad \text{se divide por 3}$$

$$x > \frac{15}{3}$$

Por la propiedad 3, el sentido de la desigualdad no cambia $\quad x > 5$

La desigualdad $x > 5$, tiene la forma $x > a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(5, \infty)$, y su representación gráfica es:

2 Determina el intervalo y grafica el conjunto solución de la desigualdad: $2x - 6 + 3x \geq 8x + 21$.

Solución

$$2x - 6 + 3x \geq 8x + 21 \quad \rightarrow \quad 2x + 3x - 8x \geq 21 + 6$$
$$-3x \geq 27$$

Por la propiedad 4, el sentido del signo de la desigualdad cambia

$$x \leq \frac{27}{-3}$$
$$x \leq -9$$

La desigualdad $x \leq -9$, tiene la forma $x \leq a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(-\infty, -9]$ y su representación gráfica es:

3 Determina el conjunto solución de $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$.

Solución

Se multiplica la desigualdad por 5, para eliminar el denominador.

$$3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7 \rightarrow (3)(5) \leq 2x - 3 < (7)(5) \rightarrow 15 \leq 2x - 3 < 35 \rightarrow 15 + 3 \leq 2x < 35 + 3$$

Se suma 3 a cada extremo de la desigualdad $\quad 18 \leq 2x < 38$

Se divide entre 2 todos los miembros $\quad \frac{18}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{38}{2}$

Por la propiedad 2, el signo de la desigualdad no cambia $\quad 9 \leq x < 19$

La desigualdad tiene la forma $a \leq x < b$, por tanto, el intervalo solución es $[9, 19)$ y la gráfica es:

4 ¿Cuál es el intervalo solución para la siguiente desigualdad $4 > \frac{2-3x}{7} > -2$?

Solución:

$$4 > \frac{2-3x}{7} > -2 \rightarrow (4)(7) > 2 - 3x > (-2)(7) \rightarrow 28 > 2 - 3x > -14$$

Se resta 2 a cada miembro $\quad 28 - 2 > -3x > -14 - 2$

$$26 > -3x > -16$$

Se divide entre − 3 y se cambia el sentido de la desigualdad $\quad \frac{26}{-3} < x < \frac{-16}{-3}$

$$-\frac{26}{3} < x < \frac{16}{3}$$

La desigualdad tiene la forma $a < x < b$, por consiguiente, el intervalo solución es:

$$\left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

5 Determina el conjunto solución de $(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4)$.

Solución

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4) \rightarrow 25x^2 + 20x + 4 - 2x > 25x^2 - 16$$

Se agrupan los términos y se simplifican $\quad 25x^2 + 20x - 2x - 25x^2 > -16 - 4$

Se divide entre 18 y se simplifica $\quad 18x > -20$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > \frac{-20}{18}$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > -\frac{10}{9}$

Finalmente, resulta que el conjunto solución es el intervalo $\left(-\frac{10}{9}, \infty\right)$

EJERCICIO 133

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $12x - 4 > 7x + 11$
2. $3x + 9 > 7x - 3$
3. $2x - 5 < x - 9$
4. $4x - 2 \geq 12x + 6$
5. $2x - 1 > 27 + 6x$
6. $x - 9 \leq 8x - 1$
7. $2x - 4 + 6x < 10x - 7$
8. $3x + 7 - 2x > 4x - 3 + 2x$
9. $0.6x + 3.4 \leq 8.4 + 0.1x$
10. $4(x-3) - 8 \leq 5 - x$
11. $16x + (5 - x) > 30$
12. $(8x+1)(x-7) \geq (2x-3)(4x+5)$
13. $x(x+12) > (x-4)^2$
14. $(4x+1)(2x-2) > 8x(x+5)$
15. $\frac{5x-1}{3} > 3$
16. $-5 - \frac{x+4}{5} > 11 - 3x$
17. $\frac{y-1}{2} - 2 \leq \frac{3y-2}{5}$
18. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}$
19. $\frac{1}{2}x - 4 \leq -9 - \frac{1}{3}x$
20. $\frac{x}{3} - \frac{8}{7} \leq 3x + \frac{2}{3}$
21. $\frac{5}{6}x - \frac{2}{5} > \frac{3}{4}x - \frac{1}{10}$
22. $\frac{5-x}{2} - \frac{x-17}{4} \geq \frac{x}{3} - \frac{7x-3}{12}$
23. $-7 < 4x + 1 < 13$
24. $-6 < 2x - 3 < 4$
25. $-8 \leq 3x + 1 \leq -2$
26. $-10 \leq x - 1 < -2$
27. $-11 < 3x - 2 < 7$
28. $-15 \leq x + 8 < -2$
29. $-5 < 3x + 1 < 13$
30. $8 - x \leq 5x + 32 < x + 36$
31. $-100 < 0.1x < 10$
32. $x^2 + 2 \leq x^2 + 5x \leq x^2 + 3$
33. $-1 < \frac{5-x}{3} \leq 7$
34. $-6 < \frac{2x-3}{4} < 2$
35. $-3 \leq \frac{4-2x}{5} < 1$
36. $-5 \leq \frac{2-3x}{6} \leq 2$
37. $2 < \frac{4-x}{3} < 6$
38. $0 \leq 6 - \frac{3}{2}x \leq 9$
39. $4 \leq x - \frac{1}{2} \leq 9$
40. $\frac{1}{3} > \frac{x-1}{5} > \frac{1}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdad cuadrática con una variable

Método por casos

Para encontrar el conjunto solución, se factoriza la expresión cuadrática, la expresión que se obtiene se divide en casos, a los que se hace un análisis de signos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Determina el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + x - 6 < 0$.

Solución

Se factoriza la desigualdad y se analizan sus factores:

$$(x+3)(x-2)<0$$

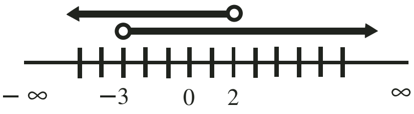
El producto de los binomios es negativo, entonces existen 2 casos:

Caso I	**Caso II**
$x-2<0 \quad \text{y} \quad x+3>0$	$x+3<0 \quad \text{y} \quad x-2>0$

El conjunto solución de cada caso resulta de la intersección de los intervalos que se obtienen al resolver las desigualdades que dan origen a cada caso.

Solución del caso I

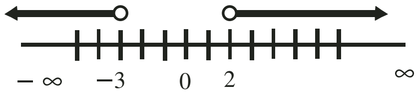
$$x-2<0 \quad \text{y} \quad x+3>0$$
$$x<2 \quad \text{y} \quad x>-3$$
$$(-\infty,2)\cap(-3,\infty)$$



$$(-3,\infty)\cap(-\infty,2) = (-3,2)$$

Solución del caso II

$$x+3<0 \quad \text{y} \quad x-2>0$$
$$x<-3 \quad \text{y} \quad x>2$$
$$(-\infty,-3)\cap(2,\infty)$$



$$(-\infty,-3)\cap(2,\infty) = \phi$$

La unión de los intervalos es el conjunto solución de la desigualdad.

$$(-3,2)\cup\phi=(-3,2)$$

Para concluir, el conjunto solución es el intervalo: $(-3,2)$

Método por intervalos

Se factoriza la expresión cuadrática, después se buscan valores que hagan cero a cada factor, entonces los valores se indican en la recta numérica y se forman los intervalos a analizar.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $x^2 - 5x - 6 > 0$.

Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

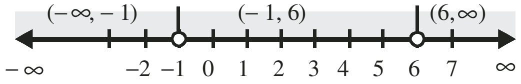
$$(x-6)\,(x+1) > 0$$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo.

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x-6=0 \quad \text{y} \quad x+1=0$$
$$x=6 \qquad\qquad x=-1$$

Los valores son 6 y – 1, se localizan en la recta numérica y se forman los intervalos.



De cada intervalo se toma un valor cualquiera, el cual se sustituye en los factores para determinar los signos de éstos. Posteriormente, se multiplican los signos para tomar como solución el intervalo o los intervalos que cumplen con la desigualdad dada.

Para el intervalo $(-\infty, -1)$

Se toma el valor de $x = -4$ y se sustituye en cada factor:

$$(-4-6)(-4+1) = (-10)(-3) = 30$$

El producto es positivo (–) (–) = +

Para el intervalo $(-1, 6)$

Se toma el valor de $x = 0$ y se sustituye en los factores:

$$(0-6)(0+1) = (-6)(1) = -6$$

El producto es negativo (–) (+) = –

Para el intervalo $(6, \infty)$

Se toma el valor de $x = 7$ y se sustituye en cada factor:

$$(7-6)(7+1) = (1)(8) = 8$$

El producto es positivo (+) (+) = +

El intervalo solución es la unión de los intervalos donde el producto es positivo, es decir,

$$(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$$

Otra forma de resolver una desigualdad cuadrática mediante intervalos, es construir una tabla que indique los signos resultantes de cada factor y el signo resulta del producto de dichos factores.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $x^2 - 25 \geq 0$.

Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

$$x^2 - 25 \geq 0$$
$$(x+5)(x-5) \geq 0$$

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x+5=0 \qquad\qquad x-5=0$$
$$x=-5 \qquad\qquad x=5$$

Los valores que hacen cero al producto son $x = 5$ y $x = -5$, entonces los intervalos que se forman son:

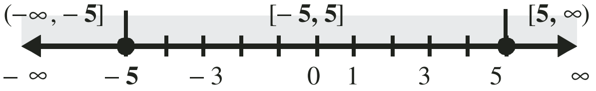


Tabla de signos

Intervalo	(− ∞, − 5] para x = − 6	[− 5, 5] para x = 0	[5, ∞) para x = 6
Signo de $x - 5$	$-6-5=-11$	$0-5=-5$	$6-5=+1$
Signo de $x + 5$	$-6+5=-1$	$0+5=+5$	$6+5=+11$
Signo del producto $(x-5)(x+5)$	$(-)(-)=+$	$(-)(+)=-$	$(+)(+)=+$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo o cero.
Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

Ejemplo

Resuelve la siguiente desigualdad: $6x^2 < 7x + 3$.

Solución

Se acomodan los términos en uno de los miembros y se factoriza la expresión cuadrática.

$$6x^2 < 7x + 3 \;\rightarrow\; 6x^2 - 7x - 3 < 0$$

$$(2x-3)(3x+1) < 0$$

$$2x - 3 = 0 \qquad\qquad 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}$$

Entonces los intervalos que se forman son:

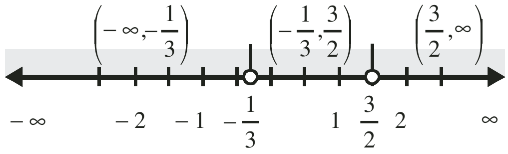


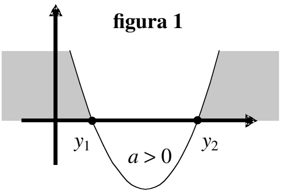
Tabla de signos

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ Para $x = -1$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ Para $x = 1$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ Para $x = 2$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $3x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo del producto $(2x-3)(3x+1)$	$(-)(-)=+$	$(-)(+)=-$	$(+)(+)=+$

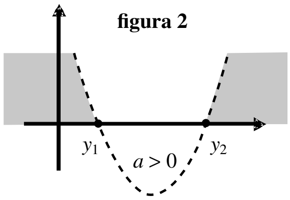
El producto es menor que cero, entonces el intervalo solución es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

Método gráfico

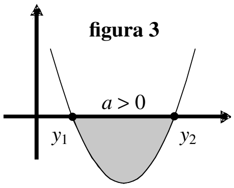
En las siguientes gráficas la parte sombreada representa al conjunto solución de las diferentes desigualdades cuadráticas, la línea continua representa un intervalo cerrado y la línea discontinua o punteada indica que el intervalo solución es abierto, éste se determina al encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado.



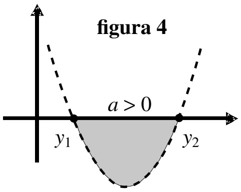
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$$



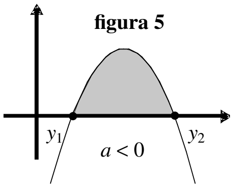
$$ax^2 + bx + c > 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$



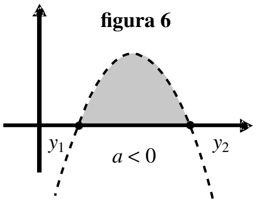
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$$



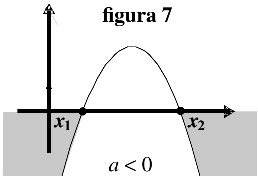
$$ax^2 + bx + c < 0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$$



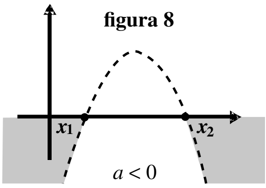
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$$



$$ax^2 + bx + c > 0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$$



$$ax^2 + bx + c \leq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$$



$$ax^2 + bx + c < 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$

Los valores de x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $x_1 < x_2$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina por método grafico el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 2x - 8 \geq 0$.

Solución

Se determinan las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$, por cualquier método, por ejemplo factorización.

$$(x+4)(x-2) = 0$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Después, cada factor se iguala a cero y se obtienen las raíces:

$$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \text{ y } x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, ya que $x_1 < x_2$

La desigualdad tiene la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ de la figura 1, con a positivo; la fórmula que representa el conjunto solución es: $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$

Finalmente, el conjunto solución es: $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$

2 Resuelve por método grafico la desigualdad $-3x^2 > 2x - 1$.

Solución

Se acomodan los términos, $-3x^2 - 2x + 1 > 0$, se determinan las raíces de la ecuación $-3x^2 - 2x + 1 = 0$, las cuales son: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

la desigualdad tiene la forma: $ax^2 + bx + c > 0$

De la figura 6 con a negativo, entonces el intervalo es: (x_1, x_2), con $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

Por tanto, el intervalo de solución es:

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

EJERCICIO 134

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades por cualquier método.

1. $-x^2 + 9 > 0$
2. $16 - x^2 \geq 0$
3. $25 - x^2 \leq 0$
4. $x^2 - 36 > 0$
5. $x - 3x^2 \geq 0$
6. $-x^2 + 5x < 0$
7. $-2x^2 + 8x < 0$
8. $x^2 - x - 20 > 0$
9. $2x^2 - 5x - 3 < 0$
10. $6x^2 - 7x - 3 \leq 0$
11. $x^2 + 3x + 6 > -2x + 2$
12. $(2x + 5)(2x - 3) \geq 3x - 12$
13. $(3x - 2)(x + 5) < 14x - 8$
14. $(x - 3)(2x + 1) \geq 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdad racional

En este tipo de desigualdades se analiza el signo del numerador y del denominador, para obtener el signo del cociente, según sea la desigualdad dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la desigualdad $\frac{2}{3x-6}<0$.

Solución

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea negativa, como lo indica la desigualdad, es necesario que el denominador sea negativo, es decir:

$$3x-6<0 \rightarrow x<2$$

Por tanto, el intervalo solución es $(-\infty, 2)$

2 Resuelve la desigualdad $\frac{4}{5x-2}>0$.

Solución

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea positiva es necesario que el denominador sea positivo, es decir:

$$5x-2>0 \rightarrow x>\frac{2}{5}$$

Por consiguiente, el intervalo solución es $\left(\frac{2}{5},\infty\right)$

Método por casos

La desigualdad dada se transforma a otra, la cual se compara con cero y se analizan los signos del cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de $\frac{x}{x+1}\geq 2$.

Solución

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realizan las operaciones indicadas:

$$\frac{x}{x+1}-2\geq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{x-2(x+1)}{x+1}\geq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{x-2x-2}{x+1}\geq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{-x-2}{x+1}\geq 0 \quad -\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

Al aplicar la propiedad 4 de las desigualdades, la nueva desigualdad a resolver es:

$$\frac{x+2}{x+1}\leq 0$$

En un cociente el denominador debe ser distinto de cero, entonces éste representa un intervalo abierto; en este ejemplo el cociente es menor o igual a cero, entonces existen 2 casos.

Caso I	**Caso II**
$x+1<0$	$x+1>0$

Solución del caso I

$$\frac{x+2}{x+1} \leq 0$$

Si $x + 1 < 0$, entonces, por la propiedad 4, al multiplicar por $(x + 1)$ se invierte el signo de la desigualdad.

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \geq 0(x+1)$$

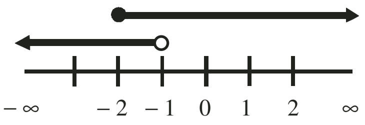
$$x+2 \geq 0$$

La solución es la intersección de los intervalos.

$$x+1<0 \;\rightarrow\; x<-1 \;\rightarrow\; (-\infty,-1)$$

$$x+2\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq -2 \;\rightarrow\; [-2,\infty)$$

$$(-\infty,-1)\cap[-2,\infty)$$



$$(-\infty,-1)\cap[-2,\infty) = [-2,-1)$$

Solución del caso II

$$\frac{x+2}{x+1} \leq 0$$

Si $x + 1 > 0$, entonces por la propiedad 3, no se invierte el signo de la desigualdad al multiplicar por $(x + 1)$.

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \leq 0(x+1)$$

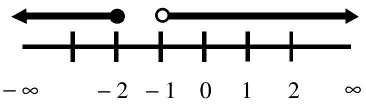
$$x+2 \leq 0$$

La solución es la intersección de los intervalos.

$$x+1>0 \;\rightarrow\; x>-1 \;\rightarrow\; (-1,\infty)$$

$$x+2\leq 0 \;\rightarrow\; x\leq -2 \;\rightarrow\; (-\infty,-2]$$

$$(-1,\infty)\cap(-\infty,-2]$$



$$(-\infty,-2]\cap(-1,\infty)=\phi$$

El intervalo de soluciones es la unión de los intervalos resultantes en cada caso.

$$[-2,-1)\cup\phi=[-2,-1)$$

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,-1)$

2 Resuelve la siguiente desigualdad $\frac{1}{2-x} \geq \frac{2}{x+1}$.

Solución

De acuerdo con la desigualdad, existen 4 casos, los cuales se indican de la siguiente forma:

Caso I
$2-x>0$ y $x+1>0$

Caso II
$2-x>0$ y $x+1<0$

Caso III
$2-x<0$ y $x+1>0$

Caso IV
$2-x<0$ y $x+1<0$

Solución del caso I

$$\text{Si } 2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$$

$$\text{Si } x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$$

Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces, el sentido de la desigualdad no cambia de dirección.

$$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\geq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$$

$$1(x+1)\geq 2(2-x)$$

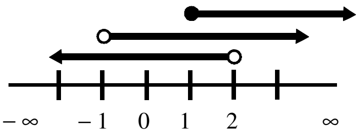
$$x+1\geq 4-2x$$

$$x+2x\geq 4-1 \rightarrow 3x\geq 3$$

$$x\geq 1 \rightarrow [1,\infty)$$

La solución del primer caso es la intersección de los 3 intervalos.

$$(-1,\infty)\cap[1,\infty)\cap(-\infty,2)$$



La solución es:

$$(-\infty,2)\cap(-1,\infty)\cap[1,\infty)=[1,2)$$

Solución del caso II

$$\text{Si } 2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$$

$$\text{Si } x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$$

Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección.

$$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\leq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$$

$$1(x+1)\leq 2(2-x)$$

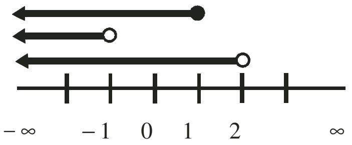
$$x+1\leq 4-2x$$

$$x+2x\leq 4-1 \rightarrow 3x\leq 3$$

$$x\leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$$

La solución del segundo caso es la intersección de los 3 intervalos.

$$(-\infty,-1)\cap(-\infty,1]\cap(-\infty,2)$$



La solución es:

$$(-\infty,-1)$$

Solución del caso III

$$\text{Si } 2-x<0 \rightarrow x>2 \rightarrow (2,\infty)$$

$$\text{Si } x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$$

Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección.

$$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\leq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$$

$$1(x+1)\leq 2(2-x)$$

$$x+1\leq 4-2x$$

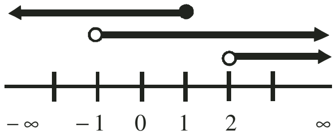
$$x+2x\leq 4-1$$

$$3x\leq 3$$

$$x\leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$$

La solución del tercer caso es la intersección de los 3 intervalos

$$(2,\infty)\cap(-1,\infty)\cap(-\infty,1]$$



La solución es:

$$(2,\infty)\cap(-1,\infty)\cap(-\infty,1]=\phi$$

Solución del caso IV

<table>
<tr>
<td>

Si $2-x<0 \;\rightarrow\; x>2 \;\rightarrow\; (2,\infty)$

Si $x+1<0 \;\rightarrow\; x<-1 \;\rightarrow\; (-\infty,-1)$

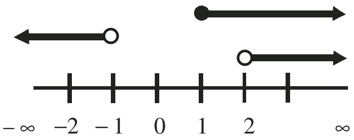
Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces el sentido de la desigualdad no cambia de dirección.

$$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\geq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$$
$$1(x+1)\geq 2(2-x)$$
$$x+1\geq 4-2x$$
$$x+2x\geq 4-1$$
$$3x\geq 3$$
$$x\geq 1 \;\rightarrow\; [1,\infty)$$

</td>
<td>

La solución del cuarto caso es la intersección de los 3 intervalos

$$(2,\infty)\;\cap\;(-\infty,-1)\;\cap\;[1,\infty)$$



La solución es:

$$(2,\infty)\;\cap\;(-\infty,-1)\;\cap\;[1,\infty)=\phi$$

</td>
</tr>
</table>

La unión de los intervalos es la solución de la desigualdad.

$$(-\infty,-1)\;\cup\;[1,2)\cup\phi\cup\phi=(-\infty,-1)\;\cup\;[1,2)$$

Método por intervalos

Consiste en encontrar los valores que hagan cero al numerador y al denominador, para determinar los intervalos y realizar el análisis de signos, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Resuelve $\dfrac{3}{2x+3}<\dfrac{1}{x-2}$.

Solución

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realiza la operación indicada.

$$\frac{3}{2x+3}<\frac{1}{x-2}\;\rightarrow\;\frac{3}{2x+3}-\frac{1}{x-2}<0\;\rightarrow\;\frac{3(x-2)-(2x+3)}{(2x+3)(x-2)}<0\;\rightarrow\;\frac{3x-6-2x-3}{(2x+3)(x-2)}<0$$
$$\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}<0$$

Se determinan aquellos valores que hacen cero al numerador y al denominador, para obtener los posibles intervalos que darán el conjunto solución.

$$x-9=0\;\rightarrow\;x=9\quad;\quad 2x+3=0\;\rightarrow\;x=-\frac{3}{2}\quad;\quad x-2=0\;\rightarrow\;x=2$$

El denominador debe de ser diferente de cero, por consiguiente, para $x=-\frac{3}{2}$ y $x=2$, los intervalos son abiertos y para $x=9$, es cerrado, entonces los intervalos que se van a analizar son:

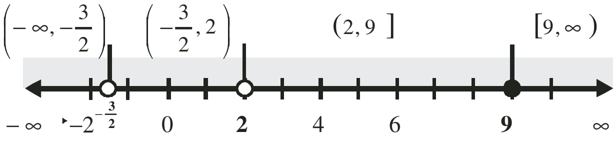


Tabla de signos

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$	(2, 9]	[9, ∞)
Signo de $x-9$	−	−	−	+
Signo de $2x+3$	−	+	+	+
Signo de $x-2$	−	−	+	+
Signo de $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}$	$\frac{(-)}{(-)(-)}=-$	$\frac{(-)}{(+)(-)}=+$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$	$\frac{(+)}{(+)(+)}=+$

Si $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}<0$, entonces el intervalo solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9]$

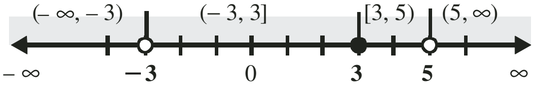
2 Resuelve la desigualdad $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)} \geq 0$.

Solución

Se buscan los valores que hacen cero los factores, con estos valores se construyen los intervalos que dan origen al conjunto solución de la desigualdad.

Para el factor (x^2+2), $x^2+2=0 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow x=\sqrt{-2}$ La raíz es imaginaria, esto significa que el factor siempre tendrá un valor positivo.	Para el factor $(3-x)$, $3-x=0 \rightarrow x=3$ Para el factor $(x-5)$, $x-5=0 \rightarrow x=5$ Para el factor $(x+3)$, $x+3=0 \rightarrow x=-3$

Luego, el denominador debe ser distinto de cero, entonces para $x=5$ y $x=-3$, los intervalos son abiertos y para $x=3$, el intervalo es cerrado.



Se construye la tabla, no se toma en cuenta el factor (x^2+2), ya que es positivo en todos los valores de x, y no afecta al signo del cociente.

Intervalo	(− ∞, − 3)	(− 3, 3]	[3, 5)	(5, ∞)
Signo de $3-x$	+	+	−	−
Signo de $x-5$	−	−	−	+
Signo de $x+3$	−	+	+	+
Signo de $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)}$	$\frac{(+)}{(-)(-)}=\frac{+}{+}=+$	$\frac{(+)}{(-)(+)}=\frac{+}{-}=-$	$\frac{(-)}{(-)(+)}=\frac{-}{-}=+$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=\frac{-}{+}=-$

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $(-\infty, -3) \cup [3, 5)$

EJERCICIO 135

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $\dfrac{5}{4x-3}>0$
2. $\dfrac{3}{2x-5}\leq 0$
3. $\dfrac{x-2}{2x-5}<0$
4. $\dfrac{6}{(x-2)^2}>0$
5. $\dfrac{5}{6-2x}\geq 0$
6. $\dfrac{2x+6}{2x-4}\leq 0$
7. $\dfrac{x+1}{x-3}\geq 0$
8. $\dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x-3}$
9. $\dfrac{4}{3x+1}\leq\dfrac{2}{x-4}$
10. $\dfrac{3}{x+2}\leq\dfrac{1}{x-2}$
11. $\dfrac{x^2(x+4)}{(x-1)(x+2)}>0$
12. $\dfrac{(x-3)^2(2x-3)}{(x+2)(x-4)}\leq 0$
13. $\dfrac{(4-x)(x+3)^2}{(x+6)(x-1)}\geq 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdad que tiene la expresión (x – a) (x – b) (x – c)...

Una forma práctica para determinar el conjunto solución, es construir una tabla con los intervalos que se forman al encontrar los valores que hacen cero a cada factor, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $(x-2)(x-4)(x+2)\geq 0$.

Solución

Se determinan los valores que hacen cero a cada factor para formar los intervalos.

Para $x-2=0 \rightarrow x=2$; Para $x-4=0 \rightarrow x=4$; Para $x+2=0 \rightarrow x=-2$

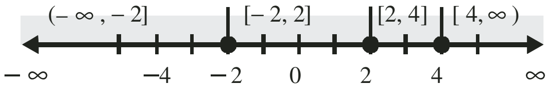


Tabla de signos

Intervalo	(−∞, −2]	[−2, 2]	[2, 4]	[4, ∞)
Signo de x – 2	–	–	+	+
Signo de x – 4	–	–	–	+
Signo de x + 2	–	+	+	+
Signo de (x – 2)(x – 4)(x + 2)	(–)(–)(–) = –	(–)(–)(+) = +	(+)(–)(+) = –	(+)(+)(+) = +

La desigualdad indica que el producto es positivo, entonces se toman los intervalos cuyo producto es positivo, es decir, $[-2,2]$ y $[4,\infty)$, luego, la unión de estos intervalos es el conjunto solución.

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,2]\cup[4,\infty)$

EJERCICIO 136

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $(x+2)(x-4)(2-x)(x+1) \geq 0$
2. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
3. $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$
4. $x^3 - 12x + 16 < 0$
5. $x^3 > 9x$
6. $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 > 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdades con valor absoluto

El conjunto solución de una desigualdad que involucra valor absoluto, está dado por las siguientes propiedades:

Sean $a, b \in R$ y $b > 0$

1. $|a| < b$ se expresa como:
   $-b < a < b$ o bien $a > -b$ y $a < b$
2. $|a| \leq b$ se expresa como:
   $-b \leq a \leq b$ o bien $a \geq -b$ y $a \leq b$
3. $|a| > b$ se expresa como:
   $-a > b$ o $a > b$ o bien $a < -b$ o $a > b$
4. $|a| \geq b$ se expresa como:
   $-a \geq b$ o $a \geq b$ o bien $a \leq -b$ o $a \geq b$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de $|x+1| < 7$.

Solución

La desigualdad $|x+1| < 7$, tiene la forma de la propiedad 1, entonces:

$$-7 < x + 1 < 7$$

O bien:

$$-7 < x+1 \qquad x+1 < 7$$
$$-7-1 < x \qquad x < 7-1$$
$$-8 < x \qquad x < 6$$

$-8 < x < 6$

Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo $(-8, 6)$

2 Encuentra el conjunto solución de $|2x-1| \geq 7$.

Solución

La desigualdad $|2x-1| \geq 7$ tiene la forma de la propiedad 4, entonces:

$$-(2x-1) \geq 7 \qquad 2x-1 \geq 7$$
$$-2x+1 \geq 7 \qquad 2x \geq 7+1$$
$$-2x \geq 7-1 \qquad 2x \geq 8$$
$$x \leq \frac{6}{-2} \qquad x \geq \frac{8}{2}$$
$$x \leq -3 \qquad x \geq 4$$

$-3 \geq x \geq 4$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$

Casos especiales de desigualdades con valor absoluto

En este tipo de desigualdades se aplican las propiedades anteriores, para obtener dos desigualdades lineales; el conjunto solución de la desigualdad es la unión o intersección de los intervalos solución de cada desigualdad obtenida.

EJEMPLOS

1 Determina el conjunto solución de la desigualdad $|x-2| \geq 3x+1$.

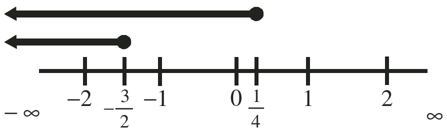
Solución

La desigualdad $|x-2| \geq 3x+1$ tiene la forma de la fórmula 4, entonces se representa como:

Primera desigualdad	Segunda desigualdad
$-(x-2) \geq 3x+1$	$x-2 \geq (3x+1)$
$-x+2 \geq 3x+1$	$x-2 \geq 3x+1$
$-3x-x \geq -2+1$	$x-3x \geq 1+2$
$-4x \geq -1$	$-2x \geq 3$
$x \leq \frac{-1}{-4}$	$x \leq \frac{3}{-2}$
$x \leq \frac{1}{4}$	$x \leq -\frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} \geq x \leq \frac{1}{4}$$

$$x \leq \frac{1}{4} \text{ o } x \leq -\frac{3}{2}$$



Finalmente, las soluciones de cada desigualdad son:

$$x \leq \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \quad ; \quad x \leq -\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$

Se determina la unión de los intervalos:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

Para concluir, la solución de la desigualdad es:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

2 Resuelve la desigualdad $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 4$.

Solución

La desigualdad tiene la forma de la propiedad 3, entonces se tienen las siguientes desigualdades.

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \text{ o } -\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$$

La desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$, se transforma a:

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \rightarrow \frac{x-1}{x+2} - 4 > 0 \rightarrow \frac{-3x-9}{x+2} > 0$$

Al aplicar el procedimiento para resolver una desigualdad racional, por el método de intervalos, los valores que hacen cero al numerador y al denominador son $x = -3$ y $x = -2$, respectivamente, el denominador debe ser distinto de cero; entonces el intervalo es abierto, lo mismo para el numerador ya que la desigualdad es estrictamente mayor que cero, por tanto los intervalos que se forman son:

$$(-\infty, -3), (-3, -2), (-2, \infty)$$

Tabla de signos

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo de $-3x-9$	+	−	−
Signo de $x+2$	−	−	+
Signo de $\frac{3x-9}{x+2}$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$

El conjunto solución para la desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$ es: $(-3, -2)$, de manera similar, se obtiene el conjunto solución de la desigualdad $-\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$, dando como solución el intervalo $\left(-2, -\frac{7}{5}\right)$; la unión de las soluciones obtenidas da origen al conjunto solución de la desigualdad original, por consiguiente la solución es:

$$(-3, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{5}\right)$$

3 Resuelve la desigualdad $|x + 1| \geq |1 - 2x|$.

Solución

Una forma de resolver el ejercicio es elevar al cuadrado ambos miembros,

$$(|x+1|)^2 \geq (|1-2x|)^2 \rightarrow (x+1)^2 \geq (1-2x)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 \geq 1 - 4x + 4x^2$$
$$0 \geq 1 - 4x + 4x^2 - x^2 - 2x - 1$$
$$0 \geq 3x^2 - 6x$$

o bien, $3x^2 - 6x \leq 0$

factorizar, $3x(x-2) \leq 0$

Los valores con factores iguales a cero son: $x = 0$ y $x = 2$, por consiguiente, los intervalos se definen como: $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ y $[2, \infty)$

Tabla de signos

Intervalo	$(-\infty, 0]$	$[0, 2]$	$[2, \infty)$
Signo de $3x$	−	+	+
Signo de $x - 2$	−	−	+
Signo de $3x(x-2)$	$(-)(-) = +$	$(+)(-) = -$	$(+)(+) = +$

El intervalo de solución es $[0, 2]$

EJERCICIO 137

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $|x| \geq 7$
2. $|x| < 7$
3. $|x - 5| > 4$
4. $|5x - 3| \leq 12$
5. $|8 - 2x| > 2$
6. $|7x - 1| < 0$
7. $|2x - 1| \leq 19$
8. $\left|6 - \frac{3}{4}x\right| > 9$
9. $\left|\frac{5}{4}(x - 10)\right| \leq 10$
10. $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$
11. $|x - 1| < 2x$
12. $|2x + 3| \geq x + 3$
13. $|2 - 2x| \leq x - 4$
14. $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1$
15. $\left|\frac{x+4}{x}\right| > 2$
16. $|x| \leq |x - 1|$
17. $|3x - 4| > |x + 4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica de una desigualdad lineal con dos variables

Una desigualdad lineal que tiene la forma:

a) $y < mx + b$ no incluye a la recta

b) $y \leq mx + b$ incluye a la recta

c) $y > mx + b$ no incluye a la recta

d) $y \geq mx + b$ incluye a la recta

En una desigualdad lineal de dos variables, el conjunto solución es la región que se forma por el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la desigualdad.

EJEMPLOS

Ejemplos

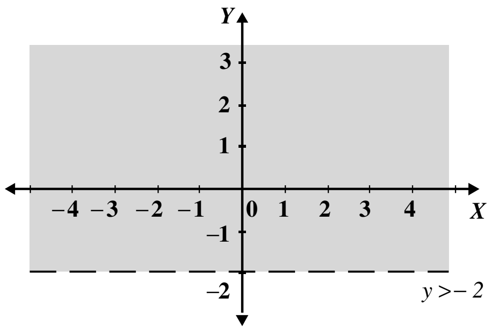
1 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > -2$.

Solución

Primero, se grafica la recta $y = -2$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad representa un intervalo abierto.

Luego se sombrea la región que contiene a todos los puntos de ordenada estrictamente mayores que -2, en este caso son todos los puntos que se encuentran por arriba de la recta punteada.

Gráfica

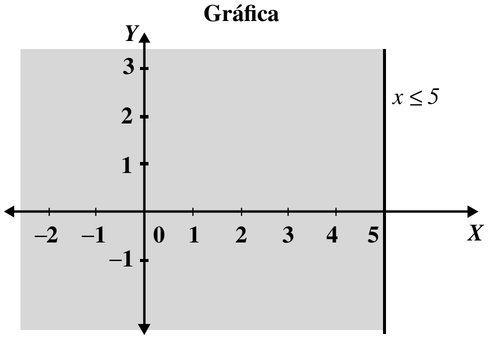


2 Encuentra la región del conjunto solución de $x \leq 5$.

Solución

Se grafica la recta $x = 5$, el signo de la desigualdad indica que la línea es continua.

El conjunto solución son los puntos del plano cuyas abscisas son menores o iguales a 5.



3 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > x + 2$.

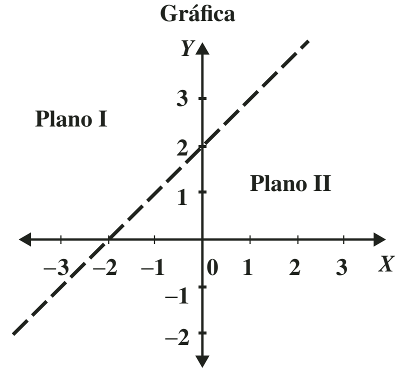
Solución

Se grafica $y = x + 2$; ésta se representa con una recta punteada, ya que el signo representa intervalo abierto, la recta divide al plano cartesiano en 2 planos.

Para determinar la región solución del sistema, se sustituye un punto perteneciente a una de las regiones y se verifica que cumpla con la desigualdad. Por ejemplo, el punto: (– 1, 4)

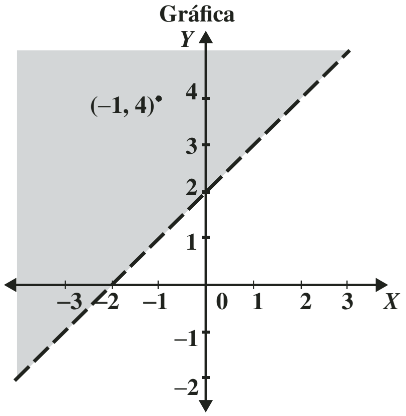
$$y > x + 2$$
$$4 > -1 + 2$$
$$4 > 1$$

El punto sí satisface la desigualdad.



La región que es la solución de la desigualdad, es el conjunto de puntos que están en la región por arriba de la recta punteada, es decir, el conjunto de puntos que se encuentran en el plano I.

Por el contrario, si el punto elegido no satisface la desigualdad, la región que representa el conjunto solución será el plano contrario al punto.



EJERCICIO 138

Grafica las siguientes desigualdades lineales:

1. $y > 6$	4. $y < 3$	7. $x < -3$	10. $3x - 2y \le 0$
2. $y \le -5$	5. $x > 4$	8. $x \ge 4$	11. $x + y < 1$
3. $y \ge 4$	6. $x \le -3$	9. $2x - y > 3$	12. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \ge 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de desigualdades lineales con dos variables

El conjunto solución de un sistema de desigualdades es la intersección de las regiones solución de cada desigualdad lineal.

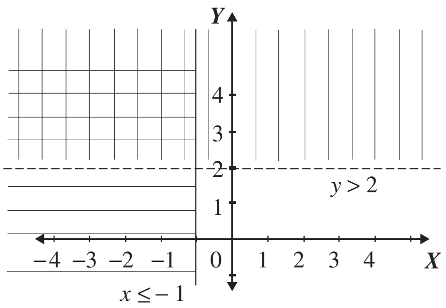
EJEMPLOS

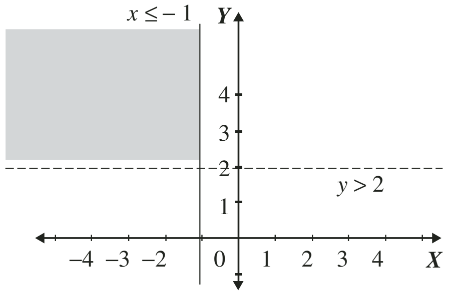
Ejemplos

1 Representa gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y > 2 \\ x \le -1 \end{cases}$.

Solución

Se encuentra la región solución de cada desigualdad. La solución es el conjunto de todos los puntos que se encuentren en la intersección de las regiones.





2 Determina gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y \ge x - 2 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$.

Solución

El sistema tiene la forma:

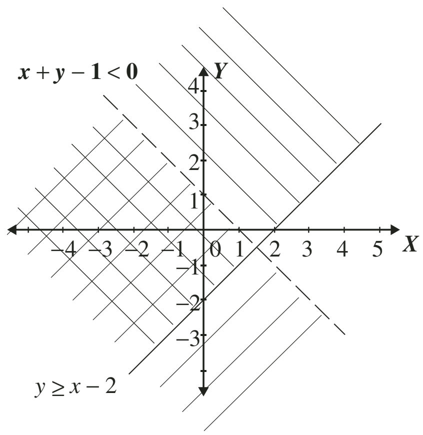
$$y \ge x - 2$$

$$y < 1 - x$$

Se grafica la recta $y = x - 2$, con línea continua ya que el signo de la desigualdad indica intervalo cerrado; luego, se grafica la recta $y = 1 - x$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad indica intervalo abierto.

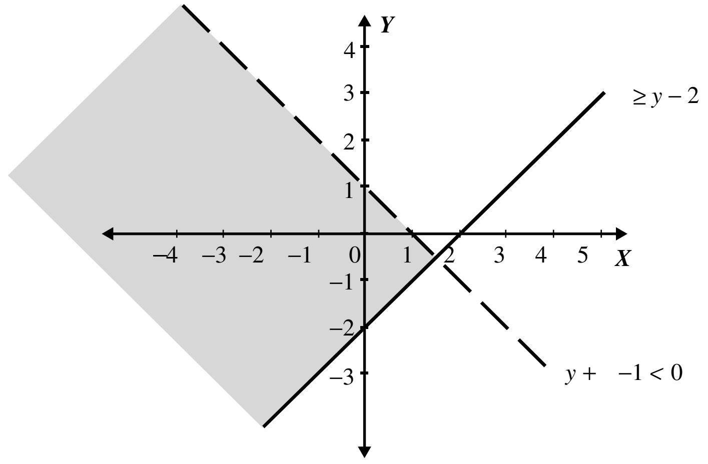
Se grafica la región solución de cada desigualdad y la intersección de las regiones son todos los puntos que satisfacen el conjunto solución del sistema.

Gráfica



Finalmente, la gráfica que representa a la región que contiene el conjunto de todos los pares ordenados es:

Gráfica



EJERCICIO 139

Determina la región que es solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} y>2 \\ x\leq 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y<-3 \\ x<4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2<x<2 \\ y\geq 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -1\leq y\leq 4 \\ 0< x<3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y>3 \\ x-y\leq 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y>9 \\ y<3x-10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y\leq 1 \\ x-y>2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y>0 \\ x-3y<0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x<y \\ x+y\leq 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y<x-4 \\ y\leq 1-x \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 14
LOGARITMOS

Reseña HISTÓRICA

John Napier

El término logaritmo lo acuñó el matemático escocés John Napier, a partir de los términos griegos *lógos* (razón) y *arithmós* (número) para designar a la correspondencia, que había descubierto, entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica. Al principio los llamó "números artificiales", pero luego cambió de opinión.

Al logaritmo que tiene por base el número **e** se le llama, en su honor, neperiano.

Pero fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos con base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: "Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, con su empleo se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, y se transforman en algo completamente simple, a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además, el cálculo de las raíces también se realiza con gran facilidad".

John Napier (1550-1617)

Definición

El $\log_b N = a$, es el exponente a, al que se eleva la base b para obtener el argumento N.

$$\log_b N = a \iff N = b^a$$

Con N y b números reales positivos y b diferente de 1

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Emplea la definición de logaritmo para transformar las siguientes expresiones a su forma exponencial:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
1. $\log_3 243 = 5$	$243 = 3^5$
2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$	$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
3. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

2 Transforma las siguientes expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas:

Forma exponencial	**Forma logarítmica**
1. $N = \left(\sqrt{2}\right)^3$	$\log_{\sqrt{2}} N = 3$
2. $\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$\log_5 \frac{1}{125} = -3$
3. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$	$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
4. $x^p = y$	$\log_x y = p$

EJERCICIO **140**

Convierte a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 8 = 3$
2. $\log_x 16 = 4$
3. $\log_3 81 = 4$
4. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
5. $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$
6. $\log_7 343 = x$
7. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$
8. $\log_3 (x-1) = 2$
9. $\log_w 625 = 4$
10. $\log_{(x-1)} 128 = 7$
11. $\log_{3x} 243 = 5$
12. $\log_{(2x-1)} 256 = 8$

Transforma a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

13. $17^2 = a$
14. $625 = 5^4$
15. $64^{\frac{1}{3}} = 4$
16. $\frac{1}{16} = N^2$
17. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
18. $(x+3) = 2^4$
19. $2^x = 256$
20. $(x-2)^3 = 8$
21. $x^w = z$
22. $\frac{1}{81} = 3^{-4}$
23. $5^{-3x} = 125$
24. $441 = (3x+2)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicación de la definición de logaritmo

En los siguientes ejemplos se aplica la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de a en la expresión: $\log_a 216 = 3$.

Solución

Se escribe el logaritmo en su forma exponencial y se despeja la incógnita:

$$\log_a 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = a^3 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{216} = a \quad \rightarrow \quad 6 = a$$

Por consiguiente, el resultado es: $a = 6$

2 Encuentra el valor de m en $\log_{\sqrt{2}} m = 3$.

Solución

Se transforma a su forma exponencial la expresión y se desarrolla el exponente:

$$\log_{\sqrt{2}} m = 3 \quad \rightarrow \quad m = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, el resultado es: $m = 2\sqrt{2}$

3 Determina el valor de x en la expresión: $\log_3 \frac{1}{729} = x$.

Solución

La expresión se transforma a la forma exponencial.

$$\log_3 \frac{1}{729} = x \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{729}$$

El número 729 se descompone en factores primos y la ecuación se expresa como:

$$3^x = \frac{1}{729} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^6} \rightarrow 3^x = 3^{-6}$$

De la última igualdad se obtiene: $x = -6$

EJERCICIO 141

Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes expresiones:

1. $\log_x 25 = 2$
2. $\log_x 64 = 3$
3. $\log_y 81 = 4$
4. $\log_b 3125 = -5$
5. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$
6. $\log_a 49 = \frac{2}{3}$
7. $\log_3 x = 4$
8. $\log_2 m = 3$
9. $\log_{0.5} y = 5$
10. $\log_4 N = \frac{3}{2}$
11. $\log_{27} w = \frac{1}{3}$
12. $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$
13. $\log_{32} b = 0.2$
14. $\log_8 x = 0.333...$
15. $\log_6 216 = x$
16. $\log_{32} \frac{1}{4} = a$
17. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$
18. $\log_{16} 0.5 = y$
19. $\log_{\frac{1}{8}} 512 = x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades

Para cualquier $M, N, b > 0$ y $b \neq 0$, se cumple que:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_e M = \ln M$, ln = logaritmo natural y $e = 2.718281...$

Importante: las siguientes expresiones no son igualdades.

$$\log_b(M+N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

Demostraciones de las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_b 1 = 0$

Demostración:
Sea $\log_b 1 = a$, esta expresión se transforma a su forma exponencial:

$$\log_b 1 = a \quad \rightarrow \quad 1 = b^a$$

Para que $b^a = 1$, se debe cumplir que $a = 0$, entonces, al sustituir este resultado se determina que:

$$\log_b 1 = a = 0$$

2. $\log_b b = 1$

Demostración:
Sea $\log_b b = a$, se aplica la definición de logaritmo y la expresión exponencial es la siguiente:

$$\log_b b = a \quad \rightarrow \quad b = b^a$$

Pero $b = b^1$, por consiguiente $b^1 = b^a$ y $a = 1$
Al sustituir este resultado se obtiene: $\log_b b = a = 1$

3. $\log_b M^n = n\log_b M$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, al elevar esta expresión a la enésima potencia se determina que:

$$\left(b^x\right)^n = M^n \quad \rightarrow \quad b^{nx} = M^n$$

La forma logarítmica de esta expresión: $\log_b M^n = nx$
Se sustituye $x = \log_b M$, y se obtiene: $\log_b M^n = n\log_b M$

4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

Demostración:

Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, se extrae la raíz enésima en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n]{M}$$

El primer miembro de esta igualdad se expresa como: $b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{M}$

Ahora esta nueva igualdad se transforma a su forma logarítmica: $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n}$

Se sustituye $x = \log_b M$, y se determina que: $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es la forma exponencial de ambas expresiones:

$$b^x = M \;\; ; \; b^y = N$$

Al multiplicar estas expresiones se obtiene: $\left(b^x\right)\left(b^y\right) = MN \quad \rightarrow \quad b^{x+y} = MN$
Se transforma a su forma logarítmica: $\log_b MN = x + y$
Se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, éste es el resultado:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es su forma exponencial:

$$b^x = M \;\; ; \; b^y = N$$

Se divide la primera expresión entre la segunda:

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{M}{N} \quad \rightarrow \quad b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

Además se transforma a su forma logarítmica la última expresión:

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y$$

Al final se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$ y resulta que:

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Aplicación de las propiedades para el desarrollo de expresiones

El logaritmo de una expresión algebraica se representa de forma distinta mediante sus propiedades y viceversa; una expresión que contiene varios logaritmos se transforma a otra que contenga un solo argumento.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Con la aplicación de las propiedades de los logaritmos desarrolla esta expresión: $\log_3 x^{12}$.

Solución

La base x se encuentra afectada por el exponente 12, por tanto se aplica la propiedad 3 y se obtiene:

$$\log_3 x^{12} = 12\log_3 x$$

2 Desarrolla la siguiente expresión: $\log_2 3x^4\sqrt{y}$.

Solución

Se aplica la propiedad para el logaritmo de un producto (propiedad 5):

$$\log_2 3x^4\sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 \sqrt{y}$$

Se aplican las propiedades 3 y 4 y la expresión queda así:

$$= \log_2 3 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$$

3 Desarrolla a su forma más simple la expresión: $\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3}$.

Solución

Se aplica la propiedad 4 para el radical:

$$\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3} = \frac{1}{4}\log_y (x-5)^3$$

Ahora al aplicar la propiedad 3, se determina que:

$$= \frac{1}{4}\left[3\log_y (x-5)\right] = \frac{3}{4}\log_y (x-5)$$

4 ¿Cuál es el desarrollo de la expresión $\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$?

Solución

Se aplica la propiedad para la división (propiedad 6):

$$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = \log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2$$

Para obtener la expresión que muestre el desarrollo final se aplica la propiedad 3:

$$= 3\log_a (x+y) - 2\log_a (x-y)$$

5 Desarrolla la siguiente expresión: $\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3$.

Solución

Se aplican las propiedades de los logaritmos y se simplifica al máximo, para obtener:

$$\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3 = 3\left[\ln\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]$$

Enseguida se aplica la propiedad del cociente y el producto (propiedades 5 y 6).

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \ln 2x^2\right]$$

En el sustraendo se aplica nuevamente la propiedad del producto, y resulta que:

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \left(\ln 2 + \ln x^2\right)\right]$$

Finalmente, se aplica la propiedad del exponente y se eliminan los signos de agrupación:

$$= 3\left[3x\ln e + \ln(x+1) - \ln 2 - 2\ln x\right] = 9x + 3\ln(x+1) - 3\ln 2 - 6\ln x$$

6 Desarrolla la siguiente expresión: $\log \sqrt[3]{\frac{3x^4}{2y^5}}$.

Solución

Se aplica la propiedad para la raíz de un número (propiedad 4):

$$\log \sqrt[3]{\frac{3x^4}{2y^5}} = \frac{1}{3}\log\frac{3x^4}{2y^5}$$

Después se aplica la propiedad para el logaritmo de un cociente (propiedad 6):

$$= \frac{1}{3}\left(\log 3x^4 - \log 2y^5\right)$$

Al aplicar la propiedad para el logaritmo de una multiplicación se obtiene:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + \log x^4\right) - \left(\log 2 + \log y^5\right)\right]$$

Se aplica también la propiedad 3 para exponentes:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + 4\log x\right) - \left(\log 2 + 5\log y\right)\right]$$

Se cancelan los signos de agrupación y éste es el desarrollo de la expresión:

$$= \frac{1}{3}\left[\log 3 + 4\log x - \log 2 - 5\log y\right]$$

$$= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{4}{3}\log x - \frac{1}{3}\log 2 - \frac{5}{3}\log y$$

7 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\log x + \log y - \log z$.

Solución

La suma de 2 logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$\log x + \log y - \log z = \log xy - \log z$$

La diferencia de logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\log xy - \log z = \log \frac{xy}{z}$$

Por tanto:

$$\log x + \log y - \log z = \log \frac{xy}{z}$$

8 Expresa como logaritmo: $2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$.

Solución

Se sabe que $\log_a a = 1$, entonces:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = 2\log_a a + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$$

(continúa)

(*continuación*)

Los coeficientes representan los exponentes de los argumentos:

$$= \log_a a^2 + \log_a (a+1)^3 - \log_a (a-1)^{\frac{1}{4}}$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos para la suma y diferencia:

$$= \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{(a-1)^{\frac{1}{4}}} = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

Por consiguiente:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

9 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\log(x-2) - 2\log x - 3\log(x+3)$.

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y simplificar se obtiene:

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2 - \log(x+3)^3$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[\log x^2 + \log(x+3)^3\right]$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2(x+3)^3$$

$$= \log \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3} = \log \frac{\left((x+1)(x-1)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3}$$

$$= \log \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2(x+3)^3}$$

10 Expresa como logaritmo: $x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

Solución

Se sabe que $\ln e = 1$, entonces:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = (x-3)\ln e + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}(x+1)$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, se tiene que:

$$\ln e^{(x-3)} + \ln(x-2)^{\frac{2}{3}} - \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} = \ln \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}} e^{(x-3)}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

Por consiguiente:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

EJERCICIO 142

Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

1. $\log_a 7^4$
2. $\log_6 3^{-\frac{3}{2}}$
3. $\log_e \sqrt[3]{e^7 x}$
4. $\log 5xy^2$
5. $\log_3 x^3y^2z$
6. $\ln\left(3e^4x^2\right)^2$
7. $\log(x+y)^3(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{x^2}$
9. $\ln\frac{xy^2}{e^3z^4}$
10. $\log_5 \frac{3x^3(1-2x)^6}{2x^y\left(x^2-y^2\right)}$
11. $\log_4 \sqrt{3x^2y^4}$
12. $\log\sqrt{(x+y)^4 z^5}$
13. $\log\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$
14. $\log\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{c^2d}}$
15. $\log_2 \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^4}$
16. $\log\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}(x+z)^2}$
17. $\log\sqrt{\frac{(x+3)(y-5)}{(x+6)^4\sqrt{y-2}}}$
18. $\ln\sqrt[3]{\frac{e^2\sqrt{(x+1)^4(x-1)^3}}{e^x\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}}$

Aplica las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos como el logaritmo de un solo argumento:

19. $2\ln 5 + 2\ln x$
20. $3\log m - 2\log n$
21. $\frac{1}{2}\log_7 x + \frac{1}{3}\log_7 y$
22. $\ln 8 + 4x$
23. $\frac{2}{5}\log m + 4\log n$
24. $2x + \log_2 3$
25. $-\frac{2}{3}\log_b(x+1) - \frac{1}{4}\log_b(x+2)$
26. $\log 3 + \log y - \log x$
27. $\log_2 x - \log_2 y - \log_2 z$
28. $1 - \log_4(m-1) - \log_4(m+1)$
29. $\frac{1}{8}\log x + \frac{1}{3}\log y - \frac{1}{4}\log z$
30. $\ln 5 + 1 + \ln y - 7\ln x$
31. $2 - x + 3\ln(x+y) - 3\ln(x-y)$
32. $\frac{2}{3}\log(x-2) - \frac{4}{5}\log(x+2) + 2\log(x+1)$
33. $\frac{1}{2} + 7\log_2 x - \frac{3}{2}\log_2 y$
34. $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log x - 1$
35. $x^2 + x + 1 - 2\log x + 3\log(x+1)$
36. $2\ln 9 + 4\ln m + 2\ln p - 2\ln 7 - 2\ln x - 6\ln y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones logarítmicas

En estas ecuaciones las incógnitas se encuentran afectadas por logaritmos, su solución se obtiene al aplicar las propiedades y la definición de logaritmo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $\log_5(2x+1)=2$.

Solución

Al aplicar la definición de logaritmo, la expresión $\log_5(2x+1)=2$ se convierte en:

$$2x+1=5^2$$

Ahora al resolver esta ecuación, se obtiene:

$$2x+1=5^2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2x+1&=25\\ 2x&=24\\ x&=12 \end{aligned}$$

2 ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$?

Solución

Se aplica la propiedad 5 para expresarla en término de un solo logaritmo:

$$\log(x+2)+\log(x-1)=1 \quad \rightarrow \quad \log(x+2)(x-1)=1 \quad \rightarrow \quad \log\left(x^2+x-2\right)=1$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve factorizando la ecuación que resulta:

$$\log\left(x^2+x-2\right)=1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x^2+x-2&=10^1\\ x^2+x-2-10&=0\\ x^2+x-12&=0\\ (x+4)(x-3)&=0\\ x+4=0 \quad \text{y} \quad x-3&=0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, los valores que satisfacen las igualdades son: $x=-4$ y $x=3$, y el valor que satisface la ecuación es $x=3$

3 Resuelve: $\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en el primer miembro de la igualdad y se aplica la propiedad 6:

$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1) \quad \rightarrow \quad \log_3(4x-5)-\log_3(2x+1)=0 \quad \rightarrow \quad \log_3\frac{4x-5}{2x+1}=0$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve la ecuación que resulta:

$$\frac{4x-5}{2x+1}=3^0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x-5}{2x+1}=1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4x-5&=2x+1\\ 2x&=6\\ x&=3 \end{aligned}$$

4 Resuelve la ecuación: $\log_2\sqrt{3x-1}=1-\log_2\sqrt{x+1}$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en un solo miembro de la igualdad:

$$\log_2\sqrt{3x-1}+\log_2\sqrt{x+1}=1$$

Se aplica la propiedad 5 para expresar la suma de logaritmos como el logaritmo de un producto:

$$\log_2\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=1$$

Se transforma la expresión a su forma exponencial y se multiplican los factores:

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=2^1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{3x^2+2x-1}=2$$

Para eliminar la raíz se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2=(2)^2 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1=4$$

Se resuelve la ecuación resultante:

$$3x^2+2x-1=4 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1-4=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-5=0$$

$$3x^2+5x-3x-5=0$$

$$x(3x+5)-1(3x+5)=0$$

$$(3x+5)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{3},\ x=1$$

Por consiguiente, los valores de la incógnita son: $-\frac{5}{3}$ y 1 , el valor que satisface la ecuación logarítmica es $x=1$

5 Resuelve la ecuación: $\ln(x+5)=2+\ln x$.

Solución

Los logaritmos se colocan de un solo lado de la igualdad:

$$\ln(x+5)-\ln x=2$$

Se aplica la propiedad de división de argumentos:

$$\ln\frac{x+5}{x}=2$$

Se transforma a su forma exponencial y se resuelve la ecuación resultante:

$$e^2=\frac{x+5}{x} \qquad xe^2=x+5 \qquad xe^2-x=5$$

$$x(e^2-1)=5$$

$$x=\frac{5}{e^2-1}$$

EJERCICIO 143

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2(x+3)=2$
2. $\log_4(4-3x)=3$
3. $\log_6(5x-9)^2=4$
4. $\log_4\sqrt{15x+1}=2$
5. $\log\sqrt{x^2+64}=1$
6. $\log_3 81-\log_3(x-4)=2$
7. $\log_7(x+9)+\log_7 49=4$
8. $\log_5 25-\log_5(x+100)=-1$

9. $\log(x+3)^2 = 1+\log(3x-11)$
10. $\log_3 x + \log_3(2x-3) = 3$
11. $\log(x+2) = -1+\log(3x-14)^2$
12. $\log_5(4-x)^3 = \log_5(6+x)^3$
13. $\log(2x+10)^2 - \log(1-x) = 2$
14. $\log_8(x-4)+\log_8(x-1) = \log_8 5x - \log_8 3$
15. $\log_6 \sqrt[3]{3x+1} = \log_6 \sqrt[3]{10} + \log_6 \sqrt[3]{x-2}$
16. $\log(8x+4) + \log(7x+16) = \log(x-2)^2 + 2$
17. $\log_2(x-1) - \log_2(3x+1) = 3 - \log_2(6x+2)$
18. $\log_{\sqrt{2}}(x-3)+\log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4+\log_{\sqrt{2}} x$
19. $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3)+2$
20. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}+1\right) = 1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$
21. $\ln(x+1) = 1+\ln(x-1)$
22. $\ln x + \ln(x-3e) = \ln 4 + 2$
23. $\ln(x-2) = \ln 12 - \ln(x+2)$
24. $\ln(x-1) - \ln(x-2) = \frac{1}{2}$
25. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) = e$
26. $\ln(x^2+x) + \ln e = \ln(x+1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se llaman ecuaciones exponenciales y su solución se obtiene al aplicar los siguientes métodos:

1. Si el argumento o resultado se puede expresar como potencia de la base, sólo se igualan exponentes.
2. Se aplican las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación: $2^{x+1} = 32$.

Solución

Se expresa a 32 como 2^5, se sustituye en la ecuación:

$$2^{x+1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{x+1} = 2^5$$

En la ecuación resultante las bases son iguales, entonces, también los exponentes:

$$x+1 = 5$$

Al resolver esta ecuación, se determina que: $x = 4$

2 Obtén el valor de la incógnita en la ecuación: $9^{x-1} = 81^x$.

Solución

El resultado 81^x se expresa como 9^{2x}, al sustituir la equivalencia:

$$9^{x-1} = 81^x \quad \rightarrow \quad 9^{x-1} = 9^{2x}$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto bases como exponentes deben ser iguales, entonces:

$$x-1 = 2x$$

Se resuelve la ecuación y resulta que: $x = -1$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $4^{x-2} = 8^{1-x}$.

Solución

Ambas bases se descomponen en sus factores primos y la ecuación se expresa como:

$$4^{x-2} = 8^{1-x} \rightarrow (2^2)^{x-2} = (2^3)^{1-x} \rightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3(1-x)}$$

Se eliminan las bases y se igualan los exponentes, para obtener la ecuación:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$

Finalmente se resuelve la ecuación y se determina el valor de la incógnita:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$
$$2x - 4 = 3 - 3x$$
$$2x + 3x = 3 + 4$$
$$5x = 7$$
$$x = \frac{7}{5}$$

Otra forma de resolver una ecuación exponencial es aplicar logaritmos, como ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $5^x = 625^2$.

Solución

Se aplican logaritmos a los dos miembros de la igualdad:

$$\log 5^x = \log 625^2$$

Se aplica la propiedad 3 para despejar a x y se efectúan las operaciones:

$$x \log 5 = 2 \log 625$$

$$x = \frac{2\log 625}{\log 5} = \frac{2(2.7959)}{0.6989} = 8$$

Por tanto, $x = 8$

2 ¿Cuál es el valor de la incógnita en la siguiente ecuación: $3^{2x-1} = 7$?

Solución

Se aplican logaritmos en ambos miembros de la igualdad,

$$\log 3^{2x-1} = \log 7$$

Se aplica la propiedad 3, se despeja x y se obtiene como resultado:

$$(2x-1)\log 3 = \log 7 \rightarrow 2x - 1 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\frac{\log 7}{\log 3} + 1}{2} = 1.3856$$

3 ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $3^{2x} - 5(3^x) + 6 = 0$?

Solución

Esta ecuación se expresa como una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$(3^x)^2 - 5(3^x) + 6 = 0$$

Se factoriza y se resuelven las ecuaciones resultantes:

$$\left(3^x - 3\right)\left(3^x - 2\right) = 0$$

$$3^x - 3 = 0 \qquad\qquad 3^x - 2 = 0$$

$$3^x = 3 \qquad\qquad 3^x = 2$$

$$\log 3^x = \log 3 \qquad\qquad \log 3^x = \log 2$$

$$x \log 3 = \log 3 \qquad\qquad x \log 3 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 3} = \frac{0.4771}{0.4771} = 1 \qquad\qquad x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0.3010}{0.4771} = 0.6309$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: 1 y 0.6309

4 Resuelve la ecuación: $\dfrac{e^{2y} + 4}{e^{2y}} = 3$.

Solución

La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$e^{2y} + 4 = 3e^{2y}$$

Se despeja el término e^{2y}:

$$e^{2y} - 3e^{2y} = -4 \qquad\qquad -2e^{2y} = -4$$

$$e^{2y} = 2$$

En ambos miembros de la igualdad se aplica el logaritmo natural y se obtiene:

$$\ln e^{2y} = \ln 2 \qquad\qquad 2y\ln e = \ln 2 \qquad\qquad 2y(1) = \ln 2$$

$$2y = \ln 2$$

$$y = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$y = \ln\sqrt{2}$$

EJERCICIO 144

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x = 625$
2. $3^x = 8$
3. $9^{2x} = 9^0$
4. $64^x = 8$
5. $(2.37)^x = 2.83$
6. $(2.4)^x = 5.76$
7. $5^{x-1} = 25$
8. $7^{3x-3} = 343$
9. $3^{2x+3} = 3$
10. $4^{x+1} = 16^{x-1}$
11. $5^{2x-3} = 4$
12. $3^x = 0.15$
13. $(0.125)^x = 128$
14. $2^{3x+1} = 256$
15. $5^x = 625^{3+x}$
16. $49^{1-2x} = 7^x$
17. $25^{x-2} = 5^{1-x}$
18. $3^x = 243^{x-2}$
19. $2^{-(x+3)} = 32^x$
20. $3^{x^2} = 729$
21. $2^{x^2-2x} = 8$

22. $25^{x}+5^{x+1}=750$

23. $6^{2x+5}-36=0$

24. $4^{x^2+3x}=\frac{1}{16}$

25. $7(3)^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

26. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=\log_2\left(3^{x-1}+1\right)^2$

27. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

28. $12^{x^2-2x+3}=1\,728$

29. $5\left(7^{2x-1}\right)=7\left(5^{x+2}\right)$

30. $2^{-2x}+2^{-x}=2$

31. $\frac{e^{y}-1}{2-3e^{y}}=\frac{2}{7}$

32. $e^{2x}-e^{x+2}=e^{x+1}-e^{3}$

33. $\frac{4e^{3x}-5}{e^{3x}-1}=3$

34. $\frac{e^{x}}{e^{x}-2}-\frac{3}{e^{x}+2}=\frac{6}{e^{2x}-4}$

35. $e^{2x}+2\sqrt{e^{2x+1}}=1-e$

36. $\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los logaritmos son una herramienta excelente para la solución de problemas propios de las ciencias, a continuación se ejemplifica su uso:

Química

En química los logaritmos se emplean para calcular la acidez de las soluciones.

$$pH=-\log\left[H^{+}\right]$$

Donde:

pH = acidez de una solución.

$\left[H^{+}\right]$ = concentración de iones de hidrógeno en iones-gramo equivalente por litro.

1 Determina el pH de una solución, que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 10^{-8} iones-g/lt.

Solución

La concentración de iones de hidrogeno en la solución es de:

$$\left[H^{+}\right]=10^{-8}\text{ iones-g/lt}$$

Se sustituye este valor en la fórmula y se obtiene:

$$pH=-\log\left[H^{+}\right]$$
$$pH=-\log\left[10^{-8}\right]\quad\text{se aplica la propiedad 3}$$
$$pH=-(-8)\log\left[10\right]=(8)(1)$$
$$pH=8$$

2 Encuentra la concentración de iones de hidrógeno de una solución, si su pH es de 7.

Solución

Se sustituye pH = 7 en la fórmula y se despeja $\left[H^{+}\right]$

$$pH=-\log\left[H^{+}\right]$$
$$7=-\log\left[H^{+}\right]$$
$$-7=\log\left[H^{+}\right]$$
$$\text{anti}\log(-7)=\left[H^{+}\right]$$

Por consiguiente, la concentración de iones de hidrógeno de una solución es:

$$\left[H^{+}\right]=10^{-7}\text{ iones-g/lt}$$

Sismología

En sismología los logaritmos se emplean para calcular la intensidad de un sismo por medio del siguiente modelo matemático:

$$I_R = \log \frac{A}{t}$$

Donde:

I_R = intensidad del sismo (escala Richter)
A = amplitud (micrómetros)
t = periodo (tiempo en segundos que dura una oscilación)

3 ¿Cuál es la intensidad de un sismo en la escala Richter si su amplitud es de 8 000 micrómetros y su periodo de 0.09 segundos?

Solución

Se sustituye A = 8 000 micrómetros y P = 0.09 segundos en la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \qquad I_R = \log \frac{8\,000}{0.09}$$
$$= \log (88\,888.89)$$
$$= 4.95$$

Por tanto, el sismo tiene una intensidad de 4.95 grados en la escala Richter.

4 Un sismo tiene una intensidad de 5.7 grados en la escala Richter, si la amplitud del movimiento es de 9 021.37 micrómetros, ¿cuál es su periodo?

Solución

Se despeja la amplitud de la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \quad \rightarrow \quad \text{anti}\log I_R = \frac{A}{t}$$
$$t = \frac{A}{\text{anti}\log I_R}$$

Se sustituye en esta última fórmula $I_R = 5.7$ y A = 9 021.37 micrómetros:

$$t = \frac{9\,021.37}{\text{anti}\log 5.7}$$
$$= \frac{9\,021.37}{501187.23} = 0.0179$$

Por consiguiente, el periodo de una oscilación es de 0.0179 segundos.

Decaimiento radiactivo

Otra aplicación de los logaritmos se lleva a cabo en el decaimiento radiactivo. El decaimiento radiactivo de un material está dado por la fórmula:

$$C = C_0 (2)^{-\frac{t}{n}}$$

Donde:

C = cantidad de material radiactivo después de cierto tiempo
t = antigüedad del material
C_0 = cantidad presente cuando $t = 0$
n = vida media del material

5 El tiempo de vida media de un material es de 25 años, ¿cuánto de dicho material queda después de haber transcurrido 15 años?

Solución

Se sustituye en la fórmula $n = 25$ y $t = 15$ años:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad C = C_0(2)^{-\frac{15}{25}}$$

$$C = C_0(2)^{-0.6}$$

$$C = C_0(0.659) = 0.659C_0$$

Por consiguiente, queda $0.659C_0$ o 65.9% del material inicial.

6 ¿Cuál es la antigüedad de una figura de madera que tiene la cuarta parte de su contenido original de carbono 14, si la vida media del material es de 5 900 años?

Solución

Con las propiedades de los logaritmos se despeja t:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{C_0} = (2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \log\left(\frac{C}{C_0}\right) = \log(2)^{-\frac{t}{n}}$$

$$\log\left(\frac{C}{C_0}\right) = -\frac{t}{n}\log(2) \quad \rightarrow \quad -\frac{n\log\left(\frac{C}{C_0}\right)}{\log 2} = t$$

Se sustituye $C = \frac{1}{4}C_0$ y $n = 5\,900$ en la última fórmula:

$$t = -\frac{(5\,900)\log\left(\frac{\frac{1}{4}C_0}{C_0}\right)}{\log 2} = -\frac{(5\,900)\log(0.25)}{\log 2} = -\frac{(-3552.15)}{0.3010} = 11\,801.16 \text{ años}$$

Por tanto, la antigüedad de la pieza es de 11 801.16 años.

7 La desintegración de cierta sustancia radiactiva se rige por el modelo matemático:

$$p = p_0 e^{-0.0072\,t}$$

Donde p_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en años. ¿Calcula el tiempo de vida media de la sustancia?

Solución

El tiempo de vida media es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia se desintegre, es decir $p = \frac{1}{2}p_0$, entonces, se despeja t de la fórmula:

$$p = p_0 e^{-0.0072t} \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-0.0072t} \qquad \ln\frac{p}{p_0} = \ln e^{-0.0072t}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -0.0072\,t\ln e \qquad -\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} = t$$

Se sustituye $p = \frac{1}{2}p_0$ y se realizan las operaciones:

$$t = -\frac{\ln \frac{p}{p_0}}{0.0072} \qquad t = -\frac{\ln \frac{\frac{1}{2}p_0}{p_0}}{0.0072} = -\frac{\ln 0.5}{0.0072} = 96.27$$

Por consiguiente, el tiempo de vida media de dicha sustancia es de 96.27 años.

Población

El crecimiento de población está determinado por la fórmula:

$$N = N_o e^{kt}$$

Donde:

N = número de habitantes de una población en determinado tiempo
N_o = número de habitantes en una población inicial, cuando $t = 0$
K = constante
t = tiempo

8 El modelo matemático que rige el crecimiento de una población es:

$$N = 3500e^{0.025t}$$

Calcula el número de habitantes que habrá en 20 años.

Solución

Se sustituye el valor de $t = 20$ en la fórmula:

$$N = 3500e^{0.025(20)}$$

$$= 3500e^{0.5} = 5\,770.52$$

Por tanto, en 20 años habrá aproximadamente 5 770 habitantes.

9 El siguiente modelo muestra el crecimiento de una población de insectos:

$$N = 850(3)^{0.094t}$$

Donde N es el número de insectos y t el tiempo en días. ¿En qué tiempo la población será de 10 200 insectos?

Solución

Se despeja t de la fórmula:

$$N = 850(3)^{0.094t} \qquad \frac{N}{850} = (3)^{0.094t} \qquad \ln\frac{N}{850} = 0.094t\ln(3) \qquad \frac{\ln\frac{N}{850}}{0.094\ln(3)} = t$$

Se sustituye $N = 10\,200$ en la última fórmula:

$$t = \frac{\ln\frac{10\,200}{850}}{0.094\ln(3)} = \frac{\ln 12}{0.094\ln(3)} = \frac{2.4849}{0.1032} = 24.07 \text{ días}$$

Por consiguiente, deben transcurrir 24.07 días para que se incremente la población de insectos a 10 200.

10 En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 480 a 1 200 en cinco horas. ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 8 000?

Solución

Se determina el valor de k para la población inicial, donde $N_o = 480$, $N = 1\,200$, $t = 5$,

$$N = No\, e^{kt} \quad \rightarrow \quad 1\,200 = 480\, e^{k(5)} \quad \rightarrow \quad \frac{1200}{480} = e^{5k} \quad \rightarrow \quad e^{5k} = 2.5$$

Se aplica logaritmo natural para despejar k:

$$\ln(e^{5k}) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad 5k \ln(e) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 2.5}{5} = \frac{0.9162}{5} = 0.183$$

Entonces, el modelo matemático se expresa como: $N = N_o e^{0.183\,t}$

Se sustituye en la fórmula $N = 8\,000$ y $N_o = 480$

$$8\,000 = 480 e^{(0.183)\,t}$$

Para despejar t se aplican logaritmos naturales:

$$\frac{8\,000}{480} = e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = \ln e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = 0.183t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{8\,000}{480}}{0.183} = 15.37$$

Por tanto, en 15.37 horas o en 15 horas 22 minutos 12 segundos, las bacterias aumentarán de 480 a 8 000

Ley del enfriamiento de Newton

Con esta ley se obtiene la temperatura T de un cuerpo en función del tiempo t; donde T' es la temperatura ambiente, el modelo matemático que la rige es:

$$T = T' + Ce^{kt}$$

Donde:

T' = temperatura del ambiente
T = temperatura del cuerpo después de cierto tiempo, además $T < T'$
C y k = constantes

11 Una barra de metal se extrae de un horno cuya temperatura es de 250°C. Si la temperatura del ambiente es de 32°C y después de 10 minutos la temperatura de la barra es de 90°C, ¿cuál es su temperatura después de 30 minutos?

Solución

La temperatura del ambiente es $T' = 32°C$, la temperatura de la barra al momento de sacarla del horno es de $T = 250°C$ y $t = 0$. Al sustituir estos valores en la ley del enfriamiento de Newton.

$$T = T \;\; + Ce^{kt} \qquad 250 = 32 + Ce^{k(0)} \qquad 250 = 32 + C$$

$$250 - 32 = C$$

$$218 = C$$

Se sustituye el valor de $C = 218°C$ en la ley:

$$T = 32 + 218e^{kt}$$

Se sustituye $t = 10$ minutos y $T = 90°C$ en la ley y se despeja $e^{k(10)}$

$$90 = 32 + 218e^{k(10)} \qquad \frac{90-32}{218} = e^{k(10)} \qquad 0.2660 = e^{10k}$$

En la última igualdad se aplica logaritmo natural a ambos miembros para despejar a k:

$$\ln 0.2660 = \ln e^{10k} \qquad \ln 0.2660 = 10k \ln e \qquad \frac{\ln 0.2660}{10} = k$$

$$-0.1324 = k$$

Al sustituir este valor se obtiene que la ley del enfriamiento para la barra es:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324t}$$

Finalmente, se sustituye $t = 30$ minutos en la fórmula anterior:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324(30)} \qquad \begin{aligned} T &= 32 + 218e^{-3.972} \\ &= 32 + 218(0.01883) \\ &= 32 + 4.1049 \\ &= 36.1049\,°\text{C} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la temperatura de la barra después de 30 minutos es de: $36.1049\,°\text{C}$

EJERCICIO 145

Resuelve los siguientes problemas:

1. Obtén el pH de una solución, cuya concentración es de 1.90×10^{-5} iones de hidrógeno/lt.
2. La concentración de una conserva de vinagre de iones de hidrógeno es de 6×10^{-4}. Determina su pH.
3. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una sustancia, cuyo pH es de 9?
4. Un sismo se presenta con 6 000 micrómetros de amplitud y un periodo de 0.3 segundos. Determina la intensidad del movimiento sísmico en la escala Richter.
5. Encuentra el periodo de un sismo de 90 000 micrómetros con intensidad de 5 grados en la escala Richter.
6. Un sismo tiene un periodo 0.35 segundos de duración y alcanza 4 grados en la escala Richter. ¿Cuál es su amplitud?
7. El tiempo de vida media de un material es de 40 años. ¿Cuánto de dicho material queda después de 30 años?
8. La vida media del tritio es de 12.5 años. ¿Cuánto tardará en desintegrarse 30% de una muestra de este metal?
9. La desintegración de una sustancia radiactiva está dada por el siguiente modelo:

$$V = V_0 e^{-0.005t}$$

   Donde V_0 es la cantidad inicial de material y t es el tiempo. ¿Cuál es el tiempo de vida media de dicho material?

10. El modelo que rige el crecimiento poblacional de una ciudad es:

$$N = 15\,000e^{0.02t}$$

   Donde N es el número de habitantes y t el tiempo en años. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 10 años?

11. En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 150 a 830 en 2 horas. ¿Cuánto tardarán en llegar a 3 000?
12. La población actual de ratas en una ciudad es de 40 000; si se duplican cada 8 años, ¿cuándo habrá 500 000 roedores?
13. Del horno de una estufa se saca una rosca, cuya temperatura es de 180°C. Si la temperatura del ambiente es de 25°C, y después de 8 minutos la temperatura de la rosca es de 100°C, ¿cuál es su temperatura después de 15 minutos?

14. La temperatura del ambiente una tarde es de 21°C. Si se sirve agua para café con una temperatura de 95°C, y después de 4 minutos la temperatura del agua es de 80°C, ¿cuál es su temperatura después de 20 minutos?

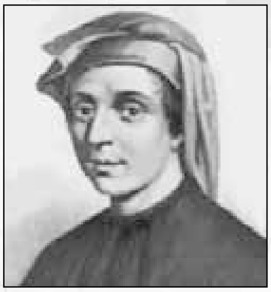
15. Una barra de aluminio se encuentra a una temperatura de 400°C y la temperatura ambiental es de 28°C. Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 300°C, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que su temperatura sea de 120°C?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 15

PROGRESIONES

Reseña HISTÓRICA



Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa nació en Italia y fue educado en África del norte. Su obra principal es *Liber Apaci* (*Libro acerca del ábaco*), donde expone la importancia del sistema de numeración indoarábiga. Escrita en 1202 sólo se conserva una versión de 1228, donde aparece un problema sobre el nacimiento de conejos, que da origen a la sucesión de Fibonacci. Por muchos años fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de sus propiedades, además de que Kepler la relacionó con la sección áurea y el crecimiento de las plantas.

La sucesión de Fibonacci se define por:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Leonardo de Pisa “Fibonacci”
(1170-1250)

Sucesión infinita

Una sucesión es de la forma:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

donde a_n es el término general y se denota por:

$$a_n = f(n) \text{ o } \{a_n\}$$

Siendo n un número natural, así: a_1 representa el primer término, a_2 el segundo término, a_3 el tercer término, a_{26} el vigésimo sexto término y a_n el n-ésimo término de la sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La sucesión con n-ésimo término $a_n = \frac{1}{4n}$, con $n \in N$, se escribe como:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots \frac{1}{4n}, \ldots$$

2 Escribe la sucesión con n-ésimo término $\{3^n\}$.

Solución

Ya que n es natural entonces toma los valores 1, 2, 3, 4,…,

$$a_1 = 3^1 \qquad a_2 = 3^2 \qquad a_3 = 3^3 \qquad a_4 = 3^4 \qquad \ldots \qquad a_n = 3^n$$

Por consiguiente, la sucesión es:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n, \ldots \quad \text{o} \quad 3, 9, 27, 81, \ldots$$

3 Encuentra los términos que conforman la sucesión con término general $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

Solución

El término general es:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

Para determinar los elementos de la sucesión, se sustituyen los números naturales:

Si $n = 1$, $a_1 = \frac{2(1)-1}{1} = \frac{2-1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Si $n = 2$, $a_2 = \frac{2(2)-1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

Si $n = 3$, $a_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$

Por tanto, los términos de la sucesión son: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}$

4 Determina los 4 primeros términos de $\{(-1)^{n+1} - 2n\}$.

Solución

Se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general:

$$\text{Si } n = 1,\ a_1 = (-1)^{1+1} - 2(1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{Si } n = 2,\ a_2 = (-1)^{2+1} - 2(2) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$\text{Si } n = 3,\ a_3 = (-1)^{3+1} - 2(3) = (-1)^4 - 6 = 1 - 6 = -5$$

$$\text{Si } n = 4,\ a_4 = (-1)^{4+1} - 2(4) = (-1)^5 - 8 = -1 - 8 = -9$$

Se concluye que los cuatro primeros términos son:

$$-1, -5, -5, -9$$

5 Determina los 5 primeros términos de la sucesión, si $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n$.

Solución

De acuerdo con la regla general se tiene que:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 = 3(2) = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3(6) = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3(18) = 54$$

$$a_5 = 3a_4 = 3(54) = 162$$

Por consiguiente, los 5 primeros términos de la sucesión son:

$$2, 6, 18, 54, 162$$

EJERCICIO 146

Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = 10 - (0.1)^n$
3. $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$
4. $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+3}$
5. $a_n = \frac{2n-1}{n!}$
6. $\left\{(-1)^n n^2\right\}$
7. $\{(n-1)(n-2)\}$
8. $\left\{(-1)^{2n-1} \frac{n}{n+1}\right\}$
9. $\left\{\frac{n!}{(n-1)!}\right\}$
10. $\left\{(-1)^{n+1} \frac{2n}{n+1}\right\}$
11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$
12. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{3}{2} - a_n$
13. $a_1 = \frac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n - 1$
14. $a_1 = 27,\ a_{n+1} = -\frac{1}{3} a_n$
15. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = na_n$
16. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = (a_n)^2$
17. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{n}}$
18. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = (-a_n)^{n-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma

Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, la suma de los primeros m términos se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$$

donde 1 y m son los valores mínimo y máximo de la variable de la suma j.

Evaluación de una suma. Es el resultado de la suma de los primeros m términos de una sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$.

Solución

Se sustituyen los valores 1, 2, 3, 4, 5 en el término general y se realiza la suma:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Por tanto, la suma es: 55

2 Encuentra el resultado de la suma: $\sum_{j=3}^{6} (j+2)$.

Solución

Se sustituyen los valores: 3, 4, 5, 6 en el término general, y se suman los resultados parciales para obtener como resultado final:

$$\sum_{j=3}^{6} (j+2) = (3+2)+(4+2)+(5+2)+(6+2) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

3 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{7} 3$.

Solución

Debido a que no existe j en la fórmula de sustitución, 3 se suma 7 veces y se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{7} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3)$?

Solución

Se sustituyen los enteros del 1 al 5:

$$\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3) = (1+2)(1-3) + (2+2)(2-3) + (3+2)(3-3) + (4+2)(4-3) + (5+2)(5-3)$$

Se realizan las operaciones de los paréntesis y, por último, se efectúa la suma para obtener:

$$= (3)(-2) + (4)(-1) + (5)(0) + (6)(1) + (7)(2)$$
$$= -6 - 4 + 0 + 6 + 14$$
$$= 10$$

Por tanto: $\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3) = 10$

5 Determina el valor de c que cumpla con la siguiente igualdad: $\sum_{j=1}^{4}(cj-1)^2 = 214$.

Solución

Se desarrolla la suma:

$$(c-1)^2 + (2c-1)^2 + (3c-1)^2 + (4c-1)^2 = 214$$

Se desarrollan los binomios y se reducen los términos semejantes, para luego resolver la ecuación resultante:

$$c^2 - 2c + 1 + 4c^2 - 4c + 1 + 9c^2 - 6c + 1 + 16c^2 - 8c + 1 = 214$$
$$30c^2 - 20c - 210 = 0$$
$$3c^2 - 2c - 21 = 0$$

Por consiguiente: $c = 3$ y $-\frac{7}{3}$

EJERCICIO 147

Determina las siguientes sumas:

1. $\sum_{j=1}^{8}(2j-3)$
2. $\sum_{j=0}^{10}(j^2-4j)$
3. $\sum_{j=0}^{5}\frac{j+1}{j+2}$
4. $\sum_{j=1}^{6}2^j$
5. $\sum_{j=1}^{6}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)$
6. $\sum_{j=1}^{9}2$
7. $\sum_{j=0}^{4}(-2)^{j-1}$
8. $\sum_{j=4}^{10}3$
9. $\sum_{j=1}^{n}n$
10. $\sum_{j=1}^{n}j$

Determina el valor de c que cumpla con las siguientes igualdades:

11. $\sum_{j=1}^{20}2c = 120$
12. $\sum_{j=2}^{8}\frac{c}{3} = \frac{7}{3}$
13. $\sum_{j=4}^{9}(cj-2) = 105$
14. $\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{cj-1}{3}\right)^2 = \frac{286}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión aritmética o sucesión aritmética

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, es una progresión aritmética si existe un número real r, tal que para todo número natural m se cumple que:

$$a_m = a_{m-1} + r$$

Donde la diferencia común o razón es $r = a_m - a_{m-1}$

Ejemplos

Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas:

a) $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n-2$

b) $-3, -5, -7, -9, \ldots, -2n-1$

c) $2, 4, 7, 11, \ldots, \frac{n^2+n+2}{2}$

Solución

a) De la sucesión: 2, 6, 10, 14,…, $4n-2$, determina la diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[4(m)-2\right]-\left[4(m-1)-2\right] = \left[4m-2\right]-\left[4m-4-2\right]$$
$$= 4m-2-4m+4+2$$
$$= 4$$

Esto significa que los términos de la sucesión se encuentran sumando 4 al término anterior, por tanto, la sucesión es aritmética.

b) Se determina la diferencia común de la sucesión:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[-2(m)-1\right]-\left[-2(m-1)-1\right] = \left[-2m-1\right]-\left[-2m+2-1\right]$$
$$= -2m-1+2m-2+1$$
$$= -2$$

Por consiguiente, la sucesión es aritmética.

c) Se determina la razón o diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[\frac{(m)^2+(m)+2}{2}\right]-\left[\frac{(m-1)^2+(m-1)+2}{2}\right] = \left[\frac{m^2+m+2}{2}\right]-\left[\frac{m^2-m+2}{2}\right]$$
$$= \frac{2m}{2}$$
$$= m$$

La diferencia no es constante, entonces la sucesión no es aritmética.

Fórmula para determinar el *n*-ésimo término en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, con razón r, entonces el n-ésimo término de la sucesión está dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Para todo $n > 1$

Donde:

a_n = n-ésimo término de la progresión

a_1 = primer término de la progresión

n = número de términos en la progresión

r = razón o diferencia común → $r = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el 8º término de la progresión $\div$ 1, 4, 7, 10,...

Solución

Se identifica el primer término, el número de términos y la razón para sustituir en la fórmula del n-ésimo término:

$$a_1 = 1,\ n = 8 \text{ y } r = 4-1 = 3$$

Por consiguiente:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_8 &= 1+(8-1)(3) \\ a_8 &= 1+(7)(3) \\ a_8 &= 1+21=22 \end{aligned}$$

Entonces, el 8º término de la progresión es 22

2 ¿Cuál es el 7º término en la progresión $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \ldots$?

Solución

Se determinan los valores de los elementos

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad n = 7 \;\text{ y }\; r = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2} + (7-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + 6\left(\frac{1}{3}\right) \\ a_7 &= \frac{1}{2} + 2 \\ a_7 &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, el 7º término es $\frac{5}{2}$

3 Si en una progresión aritmética el tercer y noveno término son 11 y 35, determina el séptimo término.

Solución

De acuerdo al problema:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1)\,r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ 11 &= a_1 + 2r \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_9 &= a_1 + (9-1)\,r \\ a_9 &= a_1 + 8r \\ 35 &= a_1 + 8r \end{aligned}$$

Se genera un sistema de ecuaciones con incógnitas a_1 y r:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 8r = 35 \end{cases}$$

Del cual, al resolverlo, se obtiene que:

$$a_1 = 3 \text{ y } r = 4$$

Luego, el séptimo término es:

$$a_7 = a_1 + (7-1)r = 3 + (6)(4) = 3 + 24 = 27$$

Fórmulas para determinar el primer término, número de términos y la razón

Todas estas fórmulas se deducen de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ y dependen de los elementos que se tengan como datos.

- Para encontrar el primer término se despeja a_1:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - (n-1)r = a_1$$

Por tanto:

$$a_1 = a_n - (n-1)r$$

- Para encontrar la razón se despeja r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - a_1 = (n-1)r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Por consiguiente:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

- Para obtener el número de términos se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{r} = n-1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

En consecuencia:

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el primer término de una progresión aritmética, si se sabe que el 13º término es -28 y la razón es -6.

Solución

Se determinan los valores de los elementos:

$$a_{13} = -28,\ n = 13 \ \text{ y } \ r = -6$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene a_1:

$$a_1 = a_{13} - (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_1 = -28 - (13-1)(-6)$$

$$a_1 = -28 - (12)(-6)$$

$$a_1 = -28 + 72$$

$$a_1 = 44$$

Por tanto, el primer término es 44

El procedimiento de los despejes es el mismo si se sustituyen los valores directamente en la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$

2 Determina la razón de la progresión aritmética cuyo primer término es 6 y el 16º es 9.

Solución

Se determinan los elementos que se tienen como datos:

$$a_n = a_{16} = 9,\ a_1 = 6 \ \text{ y } \ n = 16$$

Al sustituir en la fórmula y despejar r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 9 = 6 + (16-1)r$$

$$9 - 6 = (15)r$$

$$r = \frac{9-6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, la razón de la progresión aritmética es $\frac{1}{5}$

3 ¿Cuál es el número de términos que tiene la progresión aritmética ÷ 4.5, 6.6,…, 25.5?

Solución

Se obtienen los datos:

$$a_1 = 4.5,\ a_n = 25.5 \text{ y } r = 6.6 - 4.5 = 2.1$$

Se sustituyen los valores y se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 25.5 = 4.5 + (n-1)(2.1)$$

$$n = \frac{25.5 - 4.5 + 2.1}{2.1}$$

$$n = \frac{23.1}{2.1} = 11$$

Entonces, la progresión tiene 11 términos.

EJERCICIO 148

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas:

1. $4, 9, 14, \ldots, 5n - 1$
2. $2, 4, 8, \ldots, 2^n$
3. $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \ldots, \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}\right)$
4. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$
5. $2, 4, 6, \ldots, 2n$
6. $k + 1, 2k + 3, 3k + 5, \ldots, nk + 2n - 1$

Encuentra el término que se indica para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

7. El 8º término en: ÷ 2, 5, 8,...
8. El 11º término en: ÷ $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
9. El 15º término en: ÷ $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}, \ldots$
10. El 10º término en: ÷ 1, 7, 13,…
11. El 16º término en: ÷ $3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$
12. El 7º término en: ÷ 120, 108, 96,...
13. El 12º término en: ÷ 0.5, 0, – 0.5,...
14. El 18º término en: ÷ –5, 22, 49,...
15. El 13º término en: ÷ 15, 11.5, 8,...
16. El 17º término en: ÷ $\frac{3}{4}$, 0.875, 1,...

Dados algunos elementos de una progresión aritmética, determina el elemento que se pide:

17. El 1er término si el 13º término es 67 y la razón es 5
18. La razón si el 1er término es 7 y el 10º es – 11
19. El número de elementos de la progresión: ÷ 120, 519,…, 3 312
20. La razón si el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el 8º $-\frac{13}{12}$
21. El 11º término si el 3º es – 4 y el 7º es – 16
22. El 1er término si el 20º es – 62.5 y la razón es – 2.5
23. El número de términos de la progresión: ÷ $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{11}{8}$
24. El 1er término si el 5º es – 9 y el 9º es – 25
25. El 1er término si el 11º es $-\frac{19}{2}$ y la razón $-\frac{2}{3}$
26. Si la razón es $\frac{1}{25}$ del número de términos y el 1er y último término son: 0.15 y 3.75, respectivamente, determina el número de términos.

27. La razón si el cuarto término es $\frac{1}{4}$ y el 11º es 2
28. El 5º término si el 2º es $-\frac{3}{4}$ y el octavo es $-\frac{27}{4}$
29. El 7º término si el 3ero es $4n - 1$ y el 10º es $11n - 8$
30. El 4º término si el 8º es $\frac{44n-19}{6}$ y el 15º $\frac{43n-20}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Entonces, la suma de los primeros n términos se define como:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Demostración:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r]$$

Al cambiar el orden de los términos y realizar una suma vertical, se obtiene:

$$\begin{array}{rl} & S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r] \\ + & S = [a_1 + (n-1)r] + [a_1 + (n-2)r] + \ldots\ldots\ldots + [a_1 + r] + a_1 \\ \hline & 2S = \underbrace{[2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r] + \ldots\ldots\ldots + [2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r]}_{n \text{ veces}} \end{array}$$

Por tanto:

$$2S = n\,[2a_1 + (n-1)\,r] \quad \rightarrow \quad S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

Además sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$, entonces:

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)r\right]$$

Luego, la fórmula para hallar la suma de los primeros n términos está determinada por:

$$S = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 12 términos de la progresión aritmética:

$$\div\, 2, 7, 12, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = 2,\ n = 12 \text{ y } r = 7 - 2 = 5$$

Por consiguiente, el 12º término es:

$$a_{12} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 + (12-1)(5)$$
$$a_{12} = 2 + (11)(5)$$
$$a_{12} = 2 + 55 = 57$$

Luego, para encontrar la suma de los 12 términos se sustituyen en la fórmula los siguientes valores:

$$a_1 = 2,\ a_{12} = 57 \text{ y } n = 12$$

Finalmente,

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = \frac{12\left(2+57\right)}{2} = \frac{12(59)}{2} = 354$$

Entonces, la suma de los 12 términos es: 354

2 Encuentra la suma de los 15 primeros términos de la progresión:

$$\div\ \frac{19}{3},\ \frac{17}{3},\ 5, \ldots$$

Solución

De esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \text{ y } r = \frac{17}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{2}{3}$$

Se encuentra el 15º término:

$$a_{15} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (15-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (14)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_{15} = \frac{19}{3} - \frac{28}{3} = -3$$

Para encontrar la suma de los 15 términos, se sustituye en la fórmula:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \quad a_{15} = -3$$

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{15\left(\frac{19}{3} + (-3)\right)}{2} = \frac{15\left(\frac{10}{3}\right)}{2} = 25$$

Entonces, la suma de los 15 primeros términos es 25

EJERCICIO 149

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la suma de los primeros 8 términos de: ÷ 1, 7, 13,…?
2. Determina la suma de los 9 términos que conforman la progresión: ÷ – 5,...,7
3. Encuentra la suma de los primeros 8 términos de: ÷ 3, $\frac{13}{4}, \frac{7}{2}$,...
4. ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: ÷ 120, 108, 96,…?
5. Encuentra la suma de los 13 términos de: ÷ 15, 11.5, 8,...
6. Determina la suma de los 12 primeros términos de la progresión: ÷ 21, 24, 27…
7. Determina la suma de los 11 primeros términos de: ÷ –15, –12, –9,...
8. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: ÷ 1 000, 988,..., –188?
9. Determina la suma de los términos en la progresión: ÷ 1, 2, 3,…,n
10. Encuentra la suma de los términos de la progresión: ÷ 2, 4, 6,…,$2n$

11. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: ÷ 1, 3, 5,…, $2n - 1$?
12. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es 42. Si el último término es 31 y la razón es 5?
13. Determina el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es $\frac{65}{4}$, si el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón $\frac{1}{4}$.
14. La suma de 32 elementos en una progresión aritmética es 1 200. Si la razón es 3, determina el primer término.
15. La suma de 50 términos de una progresión aritmética es 2 550. Si la razón es 2, ¿cuál es el primer y último término de la progresión?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un constructor apila cierto número de bloques de granito de la siguiente manera: 15 bloques en la base y 2 menos en cada fila superior a la anterior. Si en la última fila superior colocó 1, encuentra el total de bloques que apiló.

Solución

El problema indica que el primer término de la progresión aritmética es 15, y que al disminuir de 2 bloques por fila, resulta:

$$\div 15, 13, 11, ...$$

Los datos conocidos son: $a_1 = 15$, $r = -2$ y $a_n = 1$, entonces se debe de calcular el número de filas que se pueden apilar.

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \qquad n = \frac{1-15}{-2} + 1 = 7 + 1 = 8$$

Luego, la suma está determinada por:

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \qquad S_8 = \frac{8\left(15+1\right)}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Entonces, el constructor apiló 64 bloques de granito.

EJERCICIO 150

1. El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50, la segunda 47, y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos lugares dispone el estacionamiento?
2. Un albañil apilará ladrillos de tal forma que la base tenga 50, la segunda capa 48, la tercera 46, y así sucesivamente hasta que la capa superior tenga 24, ¿cuántos ladrillos en total apilará el albañil?
3. Una empresa va a repartir entre 18 de sus empleados \$13 275, como bono de puntualidad. Si la diferencia entre cada uno de los bonos es de \$75, determina cuánto recibió el trabajador más puntual.
4. Se apilan 135 rollos de tela de tal manera que la base tendrá el doble de rollos que la última, y la diferencia de rollos entre cada una de las capas será de 1. ¿Cuántos rollos debe tener la última capa?
5. Se van a colocar en filas los asientos para un auditorio, de tal manera que la primera tenga 20, la segunda 23, la tercera 26 y así sucesivamente. Si en total se colocaron 819 asientos, ¿cuántas filas se formaron?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios aritméticos

Los medios aritméticos son los términos que se encuentran entre el primer y el último término, y dependen directamente del valor de la razón.

La interpolación de medios aritméticos consiste en encontrar los términos de toda la progresión a partir de conocer el primer y último término.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios aritméticos entre 5 y 32.5.

Solución

En esta progresión los elementos dados son:

$$a_1 = 5 \text{ y } a_n = 32.5$$

Para encontrar el número de términos es necesario sumar los medios aritméticos más 2 (primer y último término), entonces:

$$n = 6$$

Con los datos anteriores se encuentra la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{32.5-5}{6-1}$$

$$r = \frac{27.5}{5}$$

$$r = 5.5$$

Por tanto, la progresión está determinada por:

$$\div\, 5, (5+5.5), (10.5+5.5), (16+5.5), (21.5+5.5), 32.5$$
$$\div\, 5, \quad 10.5, \quad 16, \quad 21.5, \quad 27, \quad 32.5$$

Y los 4 medios aritméticos son:

10.5, 16, 21.5, 27

2 Interpola 5 medios aritméticos entre 11 y – 13.

Solución

Los términos dados son,

$$a_1 = 11, \; a_n = -13 \text{ y } n = 7$$

Se obtiene la razón,

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-13-11}{7-1} = \frac{-24}{6} = -4$$

Por consiguiente, los medios aritméticos son:

7, 3, – 1, – 5, – 9

Media aritmética o promedio aritmético

- Sean los números x_1 y x_2, entonces la media aritmética o promedio aritmético se define por:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Sea el conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, en consecuencia la media aritmética o promedio aritmético se determina así:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el grupo de danza se inscribieron 9 alumnos, cuyas edades son: 12, 13, 13, 14, 15, 12, 14, 15, 11. Determina la edad promedio del grupo.

Solución

Se suman todas las edades y el resultado se divide entre el número de éstas, entonces:

$$\text{Edad promedio} = \frac{12+13+13+14+15+12+14+15+11}{9} = 13.2$$

Por tanto, la edad promedio es de 13.2 años.

2 Un alumno tiene en sus 4 primeras evaluaciones las siguientes calificaciones: 7.6, 9, 8.4 y 7.8. ¿Qué calificación necesita tener en la quinta evaluación para exentar la materia con 8?

Solución

Sea x la quinta evaluación y el promedio 8, entonces:

$$\text{Promedio} = \frac{\text{suma de las evaluaciones}}{\text{total de evaluaciones}} \qquad 8 = \frac{7.6+9+8.4+7.8+x}{5}$$

Al despejar x de la expresión se obtiene:

$$5(8) - (7.6 + 9 + 8.4 + 7.8) = x$$
$$40 - 32.8 = x$$
$$7.2 = x$$

Por consiguiente, la calificación mínima que necesita para exentar es 7.2

EJERCICIO 151

Resuelve los siguientes problemas:

1. Interpola 5 medios aritméticos en la progresión, cuyo primer y último término son: 21 y 60.
2. Interpola 7 medios aritméticos en la progresión, cuyos extremos son: 5 y 17.
3. Interpola 6 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y 3.
4. Interpola 7 medios aritméticos entre 0.5 y $8\frac{1}{2}$.
5. Interpola 6 medios aritméticos entre -3 y 0.5.
6. Interpola 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$.
7. ¿Cuál es el promedio de un alumno cuyas calificaciones son: 6, 9, 8.4, 7.8 y 10?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

La compañía de dulces La Pasita compró una máquina registradora a un precio de \$12 000. Al cabo de 6 años la vendió en \$5 520. La depreciación anual es constante, calcula el valor de la registradora al final de cada año.

Solución

Ésta es una progresión aritmética, cuyos precios inicial y final son: \$12 000 y \$5 520 respectivamente, entonces, se deben interpolar 5 periodos (años).

En consecuencia:

$$a_1 = 12\,000, \quad a_n = 5\,520 \quad \text{y} \quad n = 7$$

Se encuentra la depreciación anual (razón):

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{5\,520 - 12\,000}{7-1} = \frac{-6\,480}{6} = -1\,080$$

El signo negativo indica que el costo de la máquina va a disminuir \$1 080 por año.

Por tanto, el valor de la máquina al final de cada año es:

1er año:	\$ 10 920	4^{o} año:	\$ 7 680
2^{o} año:	\$ 9 840	5^{o} año:	\$ 6 600
3er año:	\$ 8 760	6^{o} año:	\$ 5 520

EJERCICIO 152

1. En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
2. ¿Cuál es la calificación que debe obtener un alumno en el cuarto bimestre para exentar con 8.5 la materia de biología, si en los 3 primeros bimestres obtuvo las siguientes evaluaciones: 8.7, 7.9 y 7.6?
3. Determina el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
4. Obtén la media aritmética de la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
5. El lado norte del tejado de una casa lo forman 476 tejas, ordenadas de tal forma que la primera hilera tiene 80 y la última 56. Determina el número de hileras y el de tejas que contiene cada hilera.
6. Si el lado norte de un tejado consta de x menos 50 hileras, y x es el número de tejas que tiene la primera hilera. Si las hileras subsecuentes exceden en 4 tejas a la anterior, y el total de tejas utilizadas es de 576, determina el número de hileras y mediante una interpolación precisa el número de tejas de cada hilera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica o sucesión geométrica

A la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, se le llama sucesión o progresión geométrica, si para todo a_m que pertenezca a la sucesión existe una constante r diferente de cero, tal que:

$$a_{m+1} = a_m\, r$$

Donde la razón común es $r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ y se denota con el símbolo ÷÷

Ejemplos

Determina cuál de las siguientes sucesiones es geométrica.

a) $3, 6, 3\cdot 2^{n-1}$

b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$

c) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$

Solución

a) Se obtiene la razón común:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3\cdot 2^{(m+1)-1}}{3\cdot 2^{m-1}} = \frac{3\cdot 2^m}{3\cdot 2^{m-1}} = 2$$

Se observa que los elementos de la progresión: 3, 6, 12,…, $3\cdot 2^{n-1}$ se obtienen al multiplicar por 2 el término que le precede, por tanto la progresión es geométrica.

b) Se determina la razón común para la comprobación:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\frac{1}{3^{(m+1)+1}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{\frac{1}{3^{m+2}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{3^{m+1}}{3^{m+2}} = \frac{1}{3}$$

Significa que los términos subsecuentes de la progresión: $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$ se obtienen al multiplicar por $\frac{1}{3}$ entonces se deduce que es progresión geométrica.

c) Al obtener la razón de la progresión:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3(m+1)-2}{3(m)-2} = \frac{3m+3-2}{3m-2} = \frac{3m+1}{3m-2}$$

La progresión no es geométrica, ya que los términos siguientes no se pueden obtener al multiplicar por la razón resultante.

Fórmula para obtener el *n*-ésimo término en una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica $\div\div\ a_1\ a_2, a_3, \ldots, a_n$ y razón común *r*, entonces el *n*-ésimo término se define como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Donde:

a_n = *n*-ésimo término — *r* = razón de la progresión

a_1 = primer término — *n* = número de términos de la progresión

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el 9º término de la progresión $\div\div 10, 20, 40, \ldots$

Solución

Se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r = \frac{40}{20} = \frac{20}{10} = 2$$

Entonces, los elementos dados son:

$$a_1 = 10,\ r = 2 \text{ y } n = 9$$

Al sustituir, se obtiene el 9º término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_9 = 10(2)^{9-1} = 10(2)^8$$
$$a_9 = 10(256)$$
$$a_9 = 2\,560$$

Finalmente, el 9º término es 2 560

2 Determina el 7º término de $\div\div 200, 100, 50, \ldots$

Solución

De la progresión se tienen como datos:

$$a_1 = 200,\ r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \text{ y } n = 7$$

Luego, para encontrar el 7º término se sustituye en la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{200}{64} = \frac{25}{8}$$

Entonces, el 7º término es $\frac{25}{8}$

3 Si en una progresión geométrica el 3er y 7º términos son 18 y 1 458, ¿cuál es el 5º término?

Solución

De acuerdo con el problema

$$a_3 = a_1 r^{3-1} \qquad a_7 = a_1 r^{7-1}$$
$$18 = a_1 r^2 \qquad 1458 = a_1 r^6$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$a_1 r^2 = 18 \quad \text{y} \quad a_1 r^6 = 1458$$

Pero $a_1 r^6 = a_1 r^2 \cdot r^4 = 18r^4$, entonces

$$18r^4 = 1\,458 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[4]{\frac{1458}{18}} \quad \rightarrow \quad r = 3$$

Al sustituir este valor, se obtiene a_1:

$$a_1(3)^2 = 18 \rightarrow a_1 = \frac{18}{9} = 2$$

En consecuencia, el 5º término es:

$$a_5 = a_1 r^4 = (2)(3)^4 = (2)(81) = 162$$

Fórmulas para obtener el 1er término, número de términos y la razón

Todas las fórmulas subsecuentes se obtienen de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

- Para encontrar el 1er término:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

- Para encontrar la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Para determinar el número de términos que contiene la progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

Estas fórmulas se aplican, según las necesidades de los ejercicios que se deben resolver, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En una progresión geométrica la razón es $\frac{1}{2}$ y el 8º término es $\frac{1}{8}$. Calcula el 1er término.

Solución

Los datos en este problema son:

$$a_8 = \frac{1}{8} \qquad n = 8 \qquad r = \frac{1}{2}$$

Entonces, al sustituir los valores en nuestra fórmula, se obtiene:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = \frac{128}{8} = 16$$

Por tanto, el 1er término de la progresión es 16

2 ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica, cuyo 1er y 7º término es $\frac{1}{5}$ y 3 125 respectivamente?

Solución

Los elementos que se tienen como datos son:

$$a_1 = \frac{1}{5} \qquad a_7 = 3\,125 \qquad n = 7$$

Luego, al sustituir en nuestra fórmula se obtiene el valor de la razón, entonces:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt[7-1]{\frac{3125}{\frac{1}{5}}} = \sqrt[6]{15\,625} = 5$$

Finalmente, la razón de la progresión es 5

3 ¿De cuántos términos está formada la siguiente progresión geométrica?

$$\div\div\ 1, 2, \ldots, 512$$

Solución

De la progresión se tiene:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 512 \qquad r = \frac{2}{1} = 2$$

Se sustituyen los valores para obtener el número de términos.

$$n = \frac{\log\ (512) - \log\ (1) + \log\ (2)}{\log(2)} = \frac{2.7092 - 0 + .3010}{.3010} = 10$$

El número de términos de la progresión geométrica es 10

EJERCICIO 153

De las siguientes sucesiones determina cuál es geométrica:

1. $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$
3. $1, 2, 6, \ldots, n!$
4. $-4, -2, 0, \ldots, 2n-6$
5. $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3$
6. $3, 6, 12, \ldots, 3\cdot 2^{n-1}$

Determina el término que se indica en cada una de las siguientes progresiones geométricas:

7. El 6º término de $\div\div \frac{1}{3}, -1, 3, \ldots$
8. El 9º término de $\div\div \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$
9. El 5º término de $\div\div -5, 10, -20, \ldots$
10. El 7º término de $\div\div 2.5, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
11. El 10º término de $\div\div -9, -3, -1, \ldots$
12. El 8º término de $\div\div 8, 4, 2, \ldots$
13. El 12º término de $\div\div \frac{729}{64}, \frac{243}{32}, \frac{81}{16}, \ldots$
14. El 9º término de $\div\div 1, -m^3, m^6, \ldots$
15. El 10º término de $\div\div n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$
16. El 7º término de $\div\div \frac{(n+1)^5}{n^3}, \frac{(n+1)^4}{n^2}, \ldots$
17. El 13º término de $\div\div 2^{3x-4}, 2^{5x-5}, 2^{7x-6}, \ldots$
18. El 9º término de $\div\div a_1, a_1r^2, a_1r^4, \ldots$

Dados algunos elementos de una progresión geométrica, halla el elemento que se pide:

19. El 1er término, si la razón es $\frac{1}{2}$ y el 6º término es $\frac{1}{16}$
20. El 2º término, si su razón es -2 y el 7º es -128
21. La razón, si el 1er término es $\frac{3}{5}$ y el 5º es $\frac{1}{135}$
22. La razón, si el 1er término es -8 y el 7º es $-\frac{729}{512}$
23. El número de términos de $\div\div -2, -6, \ldots, -162$
24. El número de términos si la razón es $\frac{2}{5}$, el 1er término es $\frac{1}{2}$ y el último $\frac{64}{78\,125}$
25. El número de términos de $\div\div 5^x, 5^{2x+1}, \ldots, 5^{9x+8}$

26. El 1^er^ término si el 4º es $\frac{2}{27}$ y el 7º $\frac{16}{729}$
27. El 4º término si el 2º es 1 y el 9º es $\frac{1}{m^{14}}$
28. El 11º término si el 3º es $2^{\frac{7}{6}x-1}$ y el 9º es $2^{\frac{19}{6}x-7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un cultivo de 20 000 bacterias aumenta su población 25% por hora. ¿Cuántas bacterias se generan en la sexta hora?

Solución

El cultivo es el 100% inicial de bacterias, a la primera hora aumenta 25%, esto indica que el porcentaje actual es 125% o $\frac{5}{4}$ de la cantidad inicial; luego, el número de elementos que conforman la sucesión es el término inicial más los 6 términos siguientes.

De acuerdo con los datos:

$$a_1 = 20\,000,\ r = \frac{5}{4}\ \text{y}\ n = 7$$

Al sustituir en la fórmula para obtener el n-ésimo término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad a_7 = 20\,000\left(\frac{5}{4}\right)^{7-1} = 76\,293.9 \approx 76\,294$$

Por tanto, al cabo de 6 horas habrá aproximadamente 76 294 bacterias.

EJERCICIO 154

1. Determina la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sea 9 y – 1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.
2. Una generación celular es la división de una célula en 2. Si se tienen 8 células iniciales, ¿cuántas células se han generado tras 10 generaciones celulares?
3. Tres números forman una progresión aritmética con una razón de 2. Si el segundo número se incrementa en 1 y el tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica. Determina los números de la progresión aritmética
4. Determina el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.
5. Un cultivo de 25 000 bacterias aumenta 5% en 20 minutos. ¿Cuál será la población de bacterias al transcurrir una hora 20 minutos?
6. Del problema anterior establece la fórmula general que determina el número de bacterias en t horas.
7. Se invierten $230 000 a una cuenta que da por concepto de intereses 5% anual. ¿Cuánto se tendrá al final de 8 años?
8. En cierta ciudad nacieron 32 500 bebés en el año 2005, si el número de nacimientos se incrementa 20% anual, ¿cuántos bebés se estima que nazcan en el año 2009?
9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado de tal manera que los extremos coincidan con los puntos medios del primero; después se inscribe otro cuadrado en el segundo con la misma disposición. Si se conoce que el área de un cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado en el que se inscribe, ¿cuál es el área del noveno cuadrado inscrito?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Deducción de la fórmula.
Sea la progresión geométrica $\div\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, llamemos S a la suma de los primeros n términos, entonces:

$$S=\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

Al multiplicar por la razón la igualdad:

$$S\cdot r = a_1\cdot r + a_2\cdot r + a_3\cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\cdot r \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

Al restar a la ecuación 2 la ecuación 1, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} S\cdot r &=& a_1\cdot r + a_2\cdot r + a_3\cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\cdot r \\ -S &=& -a_1 - a_1\cdot r - a_2\cdot r \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n-1}\cdot r \\ \hline S\cdot r - S &=& a_n\cdot r - a_1 \end{array}$$

Entonces:

$$S(r-1) = a_n\cdot r - a_1 \quad \text{pero} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n-1}\cdot r - a_1$$

$$S(r-1) = a_1 r^n - a_1$$

Finalmente:

$$S=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} \quad \text{o} \quad S = a_1\frac{\left(r^n-1\right)}{r-1} = a_1\frac{\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica:

$$\div\div\, \frac{4}{3}, 2, 3, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{4}{3} \qquad r = \frac{3}{2} \qquad n = 8$$

Luego, al sustituir en la fórmula se obtiene la suma de los 8 términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6561}{256}-1\right)}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{6305}{256}\right) = \frac{6305}{96}$$

Se concluye que la suma de los primeros 8 términos de la progresión es $\frac{6305}{96}$

2 Encuentra el 1[er] término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 10 términos es 341 y la razón es – 2.

Solución

De acuerdo al problema los datos son:

$$n = 10,\ r = -2 \text{ y } S = 341$$

Al sustituir en la fórmula y despejar a_1 se obtiene:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \qquad 341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2 - 1}$$

Se simplifica la expresión y se despeja a_1:

$$341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-3} \qquad 341 = \frac{a_1\left[1024 - 1\right]}{-3} \qquad a_1 = \frac{(-3)(341)}{1023} = \frac{-1023}{1023} = -1$$

Por tanto, el 1[er] término de la progresión es – 1

3 Determina el número de elementos de una progresión geométrica, cuya suma es 1093, su 1[er] término es 1 y la razón es 3.

Solución

De acuerdo con el problema:

$$a_1 = 1,\ r = 3 \text{ y } S = 1\,093$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \qquad 1\,093 = \frac{1\left(3^n - 1\right)}{3 - 1}$$

Al simplificar y despejar n se obtiene:

$$1\,093 = \frac{3^n - 1}{2} \qquad 2\,186 = 3^n - 1 \qquad 2\,187 = 3^n \qquad (3)^7 = 3^n$$

$$7 = n$$

Por consiguiente, se realizó la suma de los primeros 7 términos de la progresión.

EJERCICIO 155

Encuentra la suma de los primeros términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

1. Seis términos de $\div\div\ -9,\ -3,\ -1,\ ...$
2. Siete términos de $\div\div\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ ...$
3. Nueve términos de $\div\div\ -5,\ 10,\ -20,\ ...$
4. Diez términos de $\div\div$ 9, 12, 16,…
5. Quince términos de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, ...$
6. Dieciocho términos de $\div\div$ 2, 4, 8,…

7. Doce términos de ÷÷ $\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{27}$,...

8. Diez términos de ÷÷ 1, $-\sqrt{2}$, 2,…

9. Veinte términos de ÷÷ n, n^2, n^3,…

10. Nueve términos de ÷÷ 2^{x-2}, 2^{x-1}, 2^x,…

11. n términos de ÷÷ a_1, a_1r^2, a_1r^4,…

12. n términos de ÷÷ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,...

Resuelve los siguientes problemas:

13. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica; si la suma es 255, el 1er término es – 3 y la razón – 2.

14. Determina la razón común de una progresión geométrica si el 1er término es −8 y el 6º término $-\frac{1}{4}$.

15. ¿Cuál es el 1er término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 8 términos es $\frac{6\,305}{81}$ y la razón es $\frac{2}{3}$?

16. ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{31}{64}$, su 1er término es $\frac{1}{4}$ y la razón $\frac{1}{2}$?

17. Determina el 1er término de una progresión geométrica si la suma de los primeros 6 términos es 364 y la razón es −3.

18. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{211}{24}$, el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el último término es $\frac{27}{8}$?

19. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{1-x^7}{x^4-x^5}$, el 1er término es x^2 y la razón es $\frac{1}{x}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una compañía de autos tiene estimado vender 5 000 autos en 2 010 y durante los 10 años siguientes incrementar en 5% anual las ventas con respecto al año anterior. Determina cuántos automóviles pretende vender la compañía en ese periodo.

Solución

De acuerdo con el problema los datos son:

$$a_1 = 5\,000,\ r = 100\% + 5\% = 105\% = 1.05$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{10} = 5\,000\left(\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\right)$$

$$= 5\,000\,(12.5778)$$

$$= 62\,889.46 \approx 62\,890 \text{ autos}$$

Por consiguiente la compañía pretende vender aproximadamente 62 890 autos en los siguientes 10 años.

2 Una epidemia ataca a 2 500 habitantes de una población en 2006, y por cada año que transcurre la clínica de salud de la entidad observa que las personas que padecen la enfermedad se incrementa en un 5% ¿Cuántos habitantes habrán padecido la enfermedad para el año 2010?

Solución

De acuerdo al problema, los datos son los siguientes:

$$a_1 = 2\,500,\ r = 105\% = 1.05 \text{ y } n = 5$$

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{2\,500\left(1 - 1.05^5\right)}{1 - 1.05}$$

$$= \frac{2\,500\left(1 - 1.2762\right)}{-0.05} = \frac{2\,500\left(-0.2762\right)}{-0.05} = 13\,814 \text{ habitantes}$$

Por tanto, para el año 2010 habrán padecido la epidemia 13 814 habitantes aproximadamente.

EJERCICIO 156

1. Un triángulo equilátero se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de igual área, éstos a su vez se dividen en otros 4 triángulos cada uno; este procedimiento se repite para cada triángulo resultante. ¿Cuántos triángulos se tendrán en total después de realizar 6 veces esta operación?
2. Carolina tiene papá y mamá, a su vez éstos tienen cada uno a su padre y madre, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas en el árbol genealógico de Carolina existen hasta 7 generaciones atrás, incluyéndola a ella?
3. En cierta población la producción de maíz en el año 2001 fue de 20 000 toneladas; por diversas cuestiones esa cantidad ha tenido una disminución de 25% anual. ¿Qué cantidad de maíz se produjo desde 2001 hasta 2006?
4. Durante el año 2005 cierto hospital atendió 5 110 partos; sin embargo, este número se incrementó 10% anual. ¿Cuántos partos estima el hospital atender desde 2006 hasta el año 2010?
5. La población en México en el año 2000 está cuantificada en 100 millones de personas. Si para el año 2002 las autoridades registraron 104 millones de mexicanos, ¿a qué ritmo está creciendo la población en nuestro país? Si se mantiene este crecimiento, para el año 2010 ¿cuántos habitantes tendrá el territorio mexicano?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica infinita

Sea una progresión geométrica, cuyo 1er valor es $a_1 = 100$ y la razón $r = \frac{1}{2}$, ¿qué le sucede a la suma de los primeros n términos?

El comportamiento de la progresión:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

Para $a_1 = 100$ y $r = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$S_n = 2a_1 - 2a_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_3 = 200 - 200\left(\frac{1}{8}\right) \qquad \text{si } n = 3$$

$$S_8 = 200 - 200\left(\frac{1}{256}\right) \qquad \text{si } n = 8$$

$$\approx$$

$$S_{20} = 200 - 200\left(\frac{1}{1\,048\,576}\right) \qquad \text{si } n = 20$$

De manera que, conforme n crece, el término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace más pequeño y tiende a cero.

Es por eso que para cualquier progresión geométrica infinita, donde la razón es menor que la unidad, se debe considerar la suma de los primeros n términos igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \forall \quad |r| < 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de la progresión geométrica infinita: 9, 3, 1,...

Solución

Los datos proporcionados por la progresión son $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{3}$

Como la razón $|r| < 1$ entonces se utiliza:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad \rightarrow \qquad S_n = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

En consecuencia, la suma de términos de la progresión geométrica infinita es: $\frac{27}{2}$

2 Obtén la razón de una progresión geométrica infinita si el 1^er^ término es 4 y la suma es 8.

Solución

De acuerdo al problema, los datos son:

$$a_1 = 4, S_n = 8$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de una progresión infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad 8 = \frac{4}{1-r}$$

Al despejar r de la ecuación se obtiene:

$$8(1-r) = 4 \qquad 8 - 8r = 4 \qquad -8r = -4 \qquad r = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 157

Realiza lo siguiente:

1. Encuentra la suma infinita de términos de la progresión $\div\div -6, 3, \frac{-3}{2},...$
2. Determina la suma de términos de la progresión infinita $\div\div \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...$

3. ¿Cuál es el valor de la suma infinita de términos de la progresión ÷÷ 6, 2, $\frac{2}{3}$,...?

4. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión infinita ÷÷ $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$, 1,...?

5. La suma de términos de una progresión infinita es 3 y la razón es $\frac{1}{24}$. Determina el 1er término de la progresión.

6. El 1er término de una progresión infinita es $2\sqrt{3}$ y la suma de los términos es $5\sqrt{3}$. Encuentra la razón.

7. El 1er término de una progresión infinita es $\frac{a}{b}$ con $b > a$ y $a, b \in N$ y la suma es $\frac{3a}{2b}$. ¿Cuál es la razón de la progresión?

8. Un triángulo equilátero de área 1 cm^2 se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de área $\frac{1}{4}$ cm^2, a su vez, uno de los 4 triángulos se divide nuevamente en otros 4 triángulos de $\frac{1}{16}cm^2$, y se repite el procedimiento sucesivamente con 1 de los 4 triángulos resultantes. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los triángulos?

9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado, de tal manera que los vértices extremos coincidan con los puntos medios del primero, y así sucesivamente. Si ya se conoce que el área de un cuadrado es el doble del que se inscribe, determina la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios geométricos

La interpolación de medios geométricos consiste en encontrar un cierto número de términos, entre el 1º y último, para formar una progresión geométrica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios geométricos en la progresión ÷÷ − 3,..., 96.

Solución

Al interpolar 4 medios geométricos, la progresión estará formada por 6 términos, entonces:

$$a_1 = -3,\ n = 6 \text{ y } a_6 = 96$$

Se procede a calcular la razón, a partir de:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[6-1]{\frac{96}{-3}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Por tanto, la progresión queda como a continuación se muestra:

$$-3, \quad -2(-3), \quad -2(6), \quad -2(-12), \quad -2(24), \quad -2(-48)$$

$$-3, \quad 6, \quad -12, \quad 24, \quad -48, \quad 96$$

Los medios geométricos son:

$$6,\ -12,\ 24,\ -48$$

2 Interpola 5 medios geométricos en la siguiente progresión: ÷÷ 16,..., $\frac{1}{256}$.

Solución

Los datos de la progresión son: $a_1 = 16$, $a_7 = \frac{1}{256}$ y $n = 7$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[7-1]{\frac{\frac{1}{256}}{16}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4\,096}} = \frac{1}{4}$$

La progresión que resulta es:

$$16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256}$$

Por consiguiente, los 5 medios geométricos son:

$$4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64}$$

Media geométrica

- Sean los números x_1 y x_2, entonces su media geométrica se define por:

$$\sqrt{x_1 x_2} \quad \text{si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son positivos}$$

$$-\sqrt{x_1 x_2} \quad \text{si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son negativos}$$

- Sean los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entonces, su media geométrica se define como:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la media geométrica de 12 y 48.

Solución

Se busca un término que forme una progresión geométrica con los elementos dados, entonces al aplicar la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt{(12)(48)} = \sqrt{576} = 24$$

Esto indica que la progresión geométrica formada es:

$$12,\ 24,\ 48$$

Y se comprueba con la razón:

$$r = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

Por tanto, la media geométrica es 24

2 Encuentra la media geométrica de los números 3, 9, 27 y 81.

Solución

Se aplica la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[4]{(3)(9)(27)(81)}$$

Al simplificar la raíz se obtiene:

$$\sqrt[4]{3^{10}} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{3^8} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Finalmente, la media geométrica es: $9\sqrt{3}$

EJERCICIO 158

Realiza la interpolación de los medios geométricos que se indican:

1. Cinco medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y 32.
2. Tres medias geométricas entre 12 y $\frac{4}{27}$.
3. Cuatro medias geométricas entre – 3 y – 96.
4. Cinco medias geométricas entre $1\frac{1}{2}$ y 6 144.
5. Tres medias geométricas entre $2\sqrt{3}$ y $18\sqrt{3}$.
6. Cuatro medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y $2\frac{26}{243}$.
7. Seis medias geométricas entre – 128 y – 1
8. Tres medias geométricas entre $(x-1)^2$ y $\frac{(x-1)^6}{81}$.
9. Tres medias geométricas entre $\frac{a^2}{2}$ y $\frac{8}{a^2}$.
10. Cuatro medias geométricas entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y 4.

Determina la media geométrica de los siguientes números:

11. 6 y 9
12. – 4 y – 8
13. 5 y 25
14. 9 y 16
15. 2, 3 y 6
16. 4, 8 y 32
17. 1, 3, 9 y 27
18. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interés compuesto

Una de las aplicaciones más importantes de las progresiones geométricas es el interés compuesto, por su constante uso en la economía y la administración.

Considera un capital inicial de \$100, que se invierte en una tasa fija de 10% de interés anual compuesto. Calcula el interés compuesto por periodo en los primeros 5 años.

$M_1 = 100(1 + 0.1) = 110$ primer año

$M_2 = 110(1 + 0.1) = 121$ segundo año

$M_3 = 121(1 + 0.1) = 133.1$ tercer año

$M_4 = 133.1(1 + 0.1) = 146.41$ cuarto año

$M_5 = 146.41(1 + 0.1) = 161.051$ quinto año

Ahora bien, si se desea calcular el monto que genera un capital en determinado tiempo, con una tasa de interés fija, se utiliza:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Donde:

M = monto generado

C = capital inicial

i = tasa de interés porcentual anual

n = número de capitalizaciones al año

t = tiempo que se invierte el capital

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un ama de casa ahorra en un banco \$5 000, la institución bancaria le da un interés anual de 6%. Calcula el monto que obtendrá en 12 años.

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$5\,000$ $i = 6\%$ anual $n = 1$ periodo $t = 12$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 5\,000\left(1+\frac{0.06}{1}\right)^{(1)(12)}$$

$$M = 5\,000\,(1.06)^{12}$$

$$M = 10\,060.98$$

Por tanto, esa ama de casa recibirá después de 12 años la cantidad de \$10 060.98

2 Fernando invierte \$3 000 en un negocio que le dará 10% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el monto que recibirá al cabo de 5 años?

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$3\,000$ $i = 10\%$ anual $n = 2$ periodos $t = 5$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 3\,000\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{(2)(5)}$$

$$M = 3\,000\,(1.05)^{10}$$

$$M = 4\,886.68$$

Finalmente, Fernando recibirá después de 5 años la cantidad de \$4 886.68

3 Calcula el tiempo para duplicar una inversión de 10% de interés anual capitalizable trimestralmente.

Solución

Si se quiere duplicar el capital, esto indica que $M = 2C$, luego la inversión es capitalizable trimestralmente ($n = 4$), por tanto:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad 2C = C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$$

$$2 = (1.025)^{4t}$$

Se aplican logaritmos de la siguiente manera para despejar t:

$$\log 2 = \log\ (1.025)^{4t} \quad \rightarrow \quad \log 2 = 4t\ (\log 1.025)$$

$$t = \frac{\log 2}{4\log 1.025}$$

$$t = 7 \text{ años}$$

Entonces, se concluye que el tiempo necesario para duplicar la inversión es de 7 años.

EJERCICIO 159

Determina el monto que se genera en cada uno de los siguientes problemas:

1. \$10 000 que se invierten a una tasa de 10% de interés compuesto anual, durante 10 años.
2. \$32 000 se invierten a 12% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente durante 6 años.
3. \$32 158 que vencen en 7.5 años, a 6% de interés compuesto anual.
4. \$24 000 que vencen en $6\frac{2}{3}$ años, a 9% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente.
5. \$9 500 que vencen en $8\frac{1}{2}$ años, a 4% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
6. \$15 400 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
7. \$950 que vencen en $2\frac{1}{2}$ años, a $12\frac{1}{2}$ % de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
8. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente.
9. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$ % de interés compuesto anual capitalizable cuatrimestralmente.
10. \$154 000 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable semanalmente.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Una compañía de seguros presenta a un padre de familia un fideicomiso para que su hijo de 8 años reciba una cantidad de \$40 000 cuando tenga 22 años. Determina la cantidad inicial que debe destinar si se le ofrece un contrato con una tasa de 6% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente.
12. Una deuda de \$9 000 dentro de 5 años, deberá liquidarse con un pago de \$14 747.55, ¿a qué tasa de interés trimestral está comprometido el préstamo?
13. ¿Qué tasa de interés compuesto anual duplica una inversión en 5 años?

14. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente, duplica el valor de la inversión en 10 años?
15. ¿Qué tiempo se necesita para triplicar una inversión con rendimiento de 10% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente?
16. El índice de crecimiento que se plantea para una población de 6 700 habitantes es de 2% anual. ¿Cuánto habrá crecido la población en 20 años?
17. ¿Qué tiempo habrá transcurrido para que un capital de \$5 300 se convirtiera en \$5 627.45, con una tasa de interés compuesto anual de 2%, capitalizable mensualmente?
18. Una empresa pide un préstamo bancario de \$400 000 para la compra de maquinaria. Si dicho crédito está sujeto a 5% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente, y el tiempo para pagarlo es de 10 años, ¿cuál será el monto que se pagará?
19. Emilia invierte \$85 000 durante 3 años y recibe un monto de \$92 881. ¿Cuál fue la tasa de interés compuesto anual a la que fue sometida dicha inversión?
20. ¿Cuál fue el interés que generaron \$20 000 si se invirtieron con una tasa de 12% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente durante 4 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Depreciación

Se define como la pérdida de valor de un activo físico (automóviles y casas, entre otros), como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo. Muchos de ellos tienen una vida útil durante un periodo finito.

En este capítulo sólo se abordará el método de porcentaje fijo, que se define como:

$$S = C(1-d)^t$$

Donde:

S: valor de salvamento o valor de desecho

C: costo original del activo

d: tasa de depreciación anual

t: vida útil calculada en años

EJEMPLOS

1 La tasa de depreciación de un automóvil del año está calculada en 8% anual. Si un cliente paga en una agencia \$120 000 por una unidad, ¿cuál será el valor de desecho del automóvil al final de su vida útil, si se calcula que es de 5 años?

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 120\,000,\ d = 8\% = 0.08 \ \text{ y } \ t = 5$$

Al sustituir los valores en la fórmula y desarrollar las operaciones se obtiene:

$$S = 120\,000\ (1-0.08)^5 = 120\,000(0.92)^5 = 120\,000(0.6590) = 79\,080$$

Por tanto, el valor del automóvil a los cinco años es de \$79 080

2 Una pizzería compra una motocicleta en \$42 000 para el reparto de su mercancía. Se calcula que su vida útil será de 4 años y al final de ella su valor de desecho será de \$15 000, determina la tasa de depreciación anual de la motocicleta.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 42\ 000,\ S = 15\ 000 \text{ y } t = 4$$

Al sustituir los valores en la fórmula y despejando d, se obtiene:

$$15\ 000 = 42\ 000(1-d)^4 \qquad 1 - d = \sqrt[4]{\frac{15\ 000}{42\ 000}} \qquad 1 - d = 0.7730$$

$$d = 0.227$$
$$d = 22.7\%$$

Por consiguiente, la tasa de depreciación es de 22.7%

3 Se adquirió una máquina de bordado, cuyo precio fue de \$78 600. Si su valor de desecho es de \$20 604.50 y la tasa de depreciación es de 20% anual, calcula la vida útil de la bordadora.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 78\ 600, \quad S = 20\ 604.50 \quad \text{y} \quad d = 20\% = 0\ .20$$

Al sustituir en la fórmula:

$$S = C(1-d)^t \qquad 20\ 604.5 = 78\ 600(1 - 0.20)^t$$

Se aplican logaritmos para despejar t:

$$t = \frac{\log(20\ 604.5) - \log(78\ 600)}{\log(0.80)} = 6$$

Por tanto, la vida útil de la máquina de bordado es de 6 años.

EJERCICIO 160

Realiza los siguientes problemas:

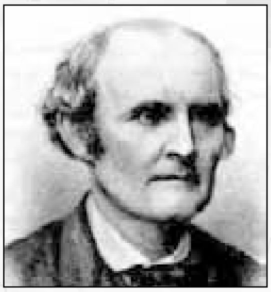
1. La tasa de depreciación de una máquina está calculada en 12% anual. Si su costo es de \$200 000, ¿cuál será su valor de desecho, si tiene una vida útil de 10 años?
2. El costo de una impresora es de \$8 000 y se calcula que su vida útil es de 3 años. Si la tasa de depreciación es de 23%, determina su valor de desecho.
3. Un agricultor compró un tractor con valor de \$300 000 y calcula que tiene una vida útil de 7 años, al cabo de los cuales su valor de desecho es de \$40 045. ¿Cuál es la tasa de depreciación del tractor?
4. Un edificio tiene un costo de \$1 200 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$226 432, y una probable vida útil de 20 años. Determina su tasa de depreciación anual.
5. Una escuela adquirió una camioneta en \$230 000 para el transporte de material, si la tasa de depreciación anual es de 12%, ¿cuál será su valor al cabo de 3 años?
6. Un automóvil tiene un costo de \$96 000, una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$31 457. Determina la tasa de depreciación anual.
7. Se adquirió una planta de luz cuyo costo fue de \$220 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$30 238; si la tasa de depreciación es de 18% anual, ¿cuál es su vida útil?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 16

Matrices

Reseña HISTÓRICA



Arthur Cayley, matemático británico. En 1838 ingresó en el Trinity College de Cambridge, donde estudió matemáticas y fue nombrado profesor de esta disciplina; permaneció en Cambridge durante el resto de sus días. Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Es considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión n.

Arthur Cayley (1821-1895)

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{11}, a_{12}, a_{13},...,a_{ij} reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{array}{l} a_{31} \rightarrow \text{Columna} \rightarrow \\ \downarrow \\ \text{Renglón} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \textcircled{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

Donde: $R_1, R_2, \ldots, R_n$ son renglones y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son columnas.

Ejemplos

Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina: a_{21}, $a_{22,}$ a_{33} y a_{43}

Solución

a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

Orden de una matriz

El tamaño de una matriz de m renglones y n columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

Ejemplos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
Orden = 1×3	Orden = 3×1	Orden = 2×2	Orden = 2×3

Número de elementos de una matriz

En una matriz de m renglones y n columnas, el número de elementos es $m \times n$, m veces n elementos.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$m \times n = 1 \times 3 = 3$ — 3 elementos; $m \times n = 3 \times 1 = 3$ — 3 elementos; $m \times n = 2 \times 2 = 4$ — 4 elementos; $m \times n = 2 \times 3 = 6$ — 6 elementos

Tipos de matrices

Matriz cuadrada. Es aquella cuyo número de renglones es igual al número de columnas; es decir, una matriz de n renglones con n columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 — Matriz cuadrada de orden 3 — Matriz cuadrada de orden n

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 — Matriz cuadrada de orden 3

Matriz renglón. Es aquella de orden $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & \frac{1}{3} & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 4$ — Orden $= 1 \times 5$

Matriz columna. Es aquella de orden $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Orden $= 2 \times 1$ — Orden $= 4 \times 1$

Matriz cero (matriz nula). Es aquella en la cual todos los elementos son cero.

Ejemplos

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Matriz nula de orden 1×3 — Matriz nula de orden 4×1 — Matriz nula de orden 3 — Matriz nula de orden 3×2

Matriz diagonal. Es aquella matriz de orden n que tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal, es decir, una matriz cuadrada $M=\left(m_{ij}\right)$, donde $m_{ij}=0$ siempre que $i\neq j$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-6&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Matriz identidad (matriz unidad). Es aquella matriz diagonal de orden n, cuyos elementos distintos de cero son 1, se denota por $\boldsymbol{I_n}$

$$\boldsymbol{I_n}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\dots&0\\0&1&0&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&0&\dots&0\\0&0&0&1&0&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{I_2}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I_3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden 2 — Matriz identidad de orden 3

Matriz triangular superior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde los elementos $a_{ij}=0$, para $i>j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3n}\\ \vdots&&&&\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & -2\\0 & 3\end{bmatrix}\qquad\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\0 & 7 & 5\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 2 — Matriz superior de orden 3

Matriz triangular inferior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde $a_{ij}=0$, para $i<j$, es decir, todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0\\a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0\\\vdots & & & & \\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}4 & 0\\-8 & 3\end{bmatrix}\qquad\qquad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\5 & 7 & 0 & 0\\9 & 4 & 1 & 0\\1 & 3 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 2 — Matriz inferior de orden 4

Matriz simétrica. Es aquella matriz cuadrada de orden n, tal que los elementos $a_{ij}=a_{ji}$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\b_{21} & b_{22} & b_{23}\\b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\6 & 1 & 4\\-3 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ de orden 2, es simétrica si:

$$\{a_{12}=a_{21}$$

La matriz $\boldsymbol{B}$ de orden 3, es simétrica si:

$$\begin{cases}b_{12}=b_{21}\\b_{13}=b_{31}\\b_{23}=b_{32}\end{cases}$$

La matriz $\boldsymbol{C}$ de orden 3, es simétrica porque:

$$\begin{cases}c_{12}=c_{21}=6\\c_{13}=c_{31}=-3\\c_{23}=c_{32}=4\end{cases}$$

Matrices iguales. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son respectivamente iguales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si las matrices $\begin{bmatrix}\sqrt{16} & 1 & 5\\-1 & 2 & -3\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}4 & (-1)^2 & 5\\-1 & \sqrt{4} & -3\\1 & 0 & \sqrt[3]{27}\end{bmatrix}$ son iguales.

Solución

Las matrices son iguales porque son del mismo orden y sus elementos son iguales:

$$\begin{bmatrix}\sqrt{16} & 1 & 5\\-1 & 2 & -3\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}4 & (-1)^2 & 5\\-1 & \sqrt{4} & -3\\1 & 0 & \sqrt[3]{27}\end{bmatrix}$$

2 Determina el valor de x, y, w y z, para que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices tienen la misma dimensión, al realizar la igualdad de términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 6z=2 \\ 2w=6 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema resulta que $x = -2$, $y = 1$, $w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 161

Determina los valores de las incógnitas, para que las matrices sean iguales.

1. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & z \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} t+4 & 6-r & 2q+1 \end{bmatrix} = [6-t \quad 5 \quad 7-q]$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3-x \\ y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & z+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2-y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación por un escalar

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y λ un número real, entonces $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ es decir, si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz también recibe el nombre de *matriz escalar*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determina $3\boldsymbol{A}$.

Solución

El escalar 3 se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz.

$$3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(0) & 3(-2) \\ 3(1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

2 Si $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ encuentra $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$.

Solución

El escalar $\frac{1}{2}$ multiplica a cada uno de los términos de la matriz.

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6) & \frac{1}{2}(-3) & \frac{1}{2}(4) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Suma

Sean $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ y $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ está determinada por:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Donde $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ es la matriz de orden $m \times n$ que resulta de sumar los elementos correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ para las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Solución

Las matrices tienen el mismo orden, en este caso, 3×2, entonces la suma se puede realizar; la definición indica que cada término de la primera matriz se suma con los términos correspondientes de la segunda matriz, es decir, se suman $a_{11} + b_{11}$, $a_{12} + b_{12}$, $a_{21} + b_{21}$, …, $a_{31} + b_{31}$,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 6+(-1) \\ 2+6 & 4+(-7) \\ -1+4 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

2 Sean las matrices:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -3 \\ -2 & 8 & -7 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Determina $3\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{D}$

Solución

Se determina cada matriz escalar:

$$3\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3(5) & 3(-2) & 3(6) & 3(-3) \\ 3(-2) & 3(8) & 3(-7) & 3(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 18 & -9 \\ -6 & 24 & -21 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(-4) & 2(8) & 2(-5) \\ 2(6) & 2(2) & 2(1) & 2(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 16 & -10 \\ 12 & 4 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Las matrices tienen el mismo orden, 2×4, al sumar se obtiene:

$$3\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 18 & -9 \\ -6 & 24 & -21 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -8 & 16 & -10 \\ 12 & 4 & 2 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 28 & -19 & 10 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 28 & -19 & 10 \end{bmatrix}$

Inverso aditivo

El inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $m \times n$ es $-\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, entonces $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$, es decir, el inverso aditivo de una matriz se obtiene al multiplicar cada elemento por el escalar -1, en otras palabras, el inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ es otra matriz $-\boldsymbol{A}$, tal que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{0}$ es la matriz cero o nula.

Ejemplo

Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 \\ -10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, determina $-\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ y verifica que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Solución

Se obtiene la matriz inverso aditivo de la matriz A y B.

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -A=(-1)\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -A=\begin{bmatrix}-1(-3) & -1(-5)\\ -1(7) & -1(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -B=(-1)\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Se realiza la operación $A + (-A)$

$$A+(-A)=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & -5+5\\ 7-7 & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $-A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$, $-B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$ y $A+(-A)=\mathbf{0}$

Resta

La diferencia o resta de dos matrices $m \times n$, se define:

$$A - B = A + (-B)$$

Donde $-B$ es el inverso aditivo de B.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $A - B$ si

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Solución

Para determinar la resta, la segunda matriz se multiplica por el escalar -1, entonces la nueva matriz se suma con la primera y queda como resultado:

$$A-B=A+(-B)\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $A-B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices $M=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $N=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, determinar $3M - 2N$.

Solución

La operación $3M - 2N$ se puede expresar como en $3M + (-2N)$, se obtienen las matrices escalares y finalmente se suman.

$$3M=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix} \text{ y } -2N=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces,

$$3\boldsymbol{M} - 2\boldsymbol{N} = 3\boldsymbol{M} + (-2\boldsymbol{N}) = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 12 & 15 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9-4 & 3+8 \\ 12+2 & 15+0 \\ 0+0 & 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 14 & 15 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{M} - 2\boldsymbol{N}$ *es* $\begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 14 & 15 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

3 Dada la siguiente igualdad:

$$3\begin{bmatrix} m+2 & n \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$, determina el valor de las incógnitas.

Solución

Se realizan las operaciones indicadas.

$$3\begin{bmatrix} m+2 & n \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(m+2)-(m-2) & 3n-(-n) \\ 3(1)-y & 3(4)-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+8 & 4n \\ 3-y & 7 \end{bmatrix}$$

Luego, $\begin{bmatrix} 2m+8 & 4n \\ 3-y & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Los términos resultantes se igualan con los términos correspondientes de la matriz del segundo miembro, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2m + 8 = 10 \\ 4n = 8 \\ 3-y = 3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtienen los siguientes valores: $y = 0$, $m = 1$ y $n = 2$

EJERCICIO 162

Para las siguientes matrices, efectúa $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}$, $4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$ y $2\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{B}$

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 5 & \frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 2 \\ 7 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -5 & 8 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

En las siguientes igualdades, determina el valor de las incógnitas.

6. $\begin{bmatrix} a-7 & 5 & w \\ v-4 & 1-c & d \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & b-1 & -4 \\ -v & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -w \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

7. $2\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1-w \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & n \\ y-1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8-n \\ -5 & 6 \\ 0 & -w \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -w & 3 \\ 11 & 9 & 12 \\ y & -7 & 2v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -4 & 2 \\ -1 & z-1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 10 & 10 & 13 \\ 6 & -4 & v \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, y $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$, la multiplicación $\boldsymbol{AB}$ da como resultado la matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ de orden $m \times p$, tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Para:

$i = 1, 2, 3, 4,..., m;$ $\qquad j = 1, 2, 3, 4,..., n$

El número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$, es igual al número de renglones de la matriz $\boldsymbol{B}$.

Matriz $\boldsymbol{A}$ $\quad$ Matriz $\boldsymbol{B}$

$m \times n$ $\quad$ $n \times p$

igual

Tamaño de $\boldsymbol{AB}$ es $m \times p$

Ejemplos

Matriz *A*	Matriz *B*	Matriz *AB*
2×3	3×4	2×4
1×2	2×3	1×3
5×4	4×2	5×2
3×1	3×1	No definida

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la multiplicación de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$\boldsymbol{A}$ es una matriz de 2×2 y $\boldsymbol{B}$ de 2×3, por tanto, la multiplicación se puede realizar. Al aplicar la definición se procede de la siguiente manera: se multiplica el primer renglón por cada una de las columnas de la segunda matriz.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(0)+3(1) & 2(3)+3(5) \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se realiza la misma operación con el segundo renglón.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 5(2)+4(-1) & 5(0)+4(1) & 5(3)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, se unen los resultados para obtener la matriz $\boldsymbol{AB}$,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

Su orden es de 2×3

2 Determina $\boldsymbol{R}^2$ si $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Se transforma $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{RR}$; esto es posible si $\boldsymbol{R}$ es una matriz cuadrada y se procede a realizar las operaciones indicadas en el ejemplo anterior.

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+1(0)-1(-2) & 3(1)+1(4)-1(1) & 3(-1)+1(2)-1(0) \\ 0(3)+4(0)+2(-2) & 0(1)+4(4)+2(1) & 0(-1)+4(2)+2(0) \\ -2(3)+1(0)+0(-2) & -2(1)+1(4)+0(1) & -2(-1)+1(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } \boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las matrices

Sean las matrices $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ de orden $m \times n$, $\boldsymbol{O}$ la matriz nula de $m \times n$, $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad y r, s escalares, entonces:

Propiedades	
Conmutativa de la suma	$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}$
Asociativa de la suma	$\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{R}$
Identidad de la suma	$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$
Distributiva izquierda	$r(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = r\boldsymbol{P} + r\boldsymbol{Q}$
Distributiva derecha	$(r + s)\boldsymbol{P} = r\boldsymbol{P} + s\boldsymbol{P}$
Inverso aditivo	$\boldsymbol{P} + (-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{O}$
Asociativa de la multiplicación de escalares	$(r \cdot s)\boldsymbol{P} = r(s\boldsymbol{P})$
Asociativa de la multiplicación	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QR}) = (\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{R}$
Identidad de la multiplicación	$\boldsymbol{IP} = \boldsymbol{PI} = \boldsymbol{P}$
Distributiva por la izquierda	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{PR}$
Distributiva por la derecha	$(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{QP} + \boldsymbol{RP}$

EJERCICIO 163

Para las siguientes matrices determina ***AB***, ***BA***, ***A***(***B*** – 2***C***) y ***A***(***BC***), en caso de ser posible.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Determinantes

El determinante de una matriz ***A*** de orden *n*, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por det***A*** = $|A|$

Sea la matriz de orden 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de ***A*** está dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(−) (+)

Por tanto,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo

Evalúa el determinante de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Cada elemento de la matriz se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (-2)(1) \quad 20 + 2 = 22$$

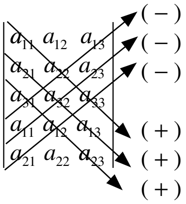
Finalmente, el det***A*** = 22

Sea la matriz de orden 3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Se escribe el determinante de 3 × 3, para resolverlo se repiten los dos primeros renglones y se multiplican las entradas en diagonal como se indica:

$$det(A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=$$



Por tanto, el determinante es:

$$\det A=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}\right)-\left(a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}+a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}\right)$$

$$\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}$$

Ejemplo

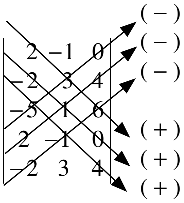
El determinante de la matriz ***B***, es:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 4\\ -5 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

Solución

Se forma el siguiente arreglo: se aumentan los dos primeros renglones del determinante, como se indica, después se procede a sustituir los términos en la fórmula y se realizan las operaciones indicadas en la fórmula.

$det(B)=$



Por consiguiente, el determinante es:

$$\det B=(2)(3)(6)+(-2)(1)(0)+(-5)(-1)(4)-(-2)(-1)(6)-(2)(1)(4)-(-5)(3)(0)$$
$$=36+0+20-12-8-0=36$$

En consecuencia, el det***B*** = 36

Propiedades

1. Si se intercambian dos renglones de una matriz ***A*** de orden n, el determinante de la matriz resultante es:

$$\det A=-\det A$$

2. Si son cero todos los elementos de un renglón o columna de una matriz ***A*** de orden n, entonces

$$\det A=0$$

3. Si 2 renglones son iguales de una matriz ***A*** de orden n, entonces

$$\det A=0$$

4. Si se tiene una matriz ***A*** de orden n, ya sea matriz triangular superior o inferior, entonces

det***A*** = producto de los elementos de la diagonal principal

5. Si un renglón de una matriz se multiplica por un escalar λ, entonces

$$\det\boldsymbol{A} = \lambda \det\boldsymbol{A}$$

6. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices de orden n, entonces

$$\det\boldsymbol{AB} = \det\boldsymbol{A}\ \det\boldsymbol{B}$$

EJEMPLOS

1 Verifica la propiedad 2 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que en uno de los renglones de la matriz todos son ceros, luego se procede a encontrar el determinante de la matriz A

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = (1)(0)-(0)(-3) = 0-0=0$$

Finalmente, el $\det\boldsymbol{A} = 0$, y se verifica la propiedad 2

2 Verifica la propiedad 4 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que la matriz es triangular superior, entonces el producto de la diagonal principal es:

$$(5)(4)=20$$

Luego, se procede a hallar el determinante de la matriz A

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = (5)(4)-(0)(1) = 20-0=20$$

Por tanto, $\det\boldsymbol{A} = (5)(4) = 20$

Finalmente, se verifica la propiedad 4

3 Verifica que el $\det\boldsymbol{A} = 0$ si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det\boldsymbol{A} &= (1)(3)(2)+(2)(3)(2)+(1)(3)(4)-(2)(3)(2)-(1)(3)(4)-(1)(3)(2) \\ &= 6+12+12-12-12-6=0 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\det\boldsymbol{A} = 0$$

EJERCICIO 164

Encuentra el determinante de las siguientes matrices:

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 2. $B=\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ 3. $C=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$ 4. $E=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ 5. $D=\begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{P}$ de orden n, si existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ tal que:

$$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{I}_n$$

Entonces, se dice que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{P}$ y se denota $\boldsymbol{P}^{-1}$, de tal forma que:

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n$$

Donde:

$\boldsymbol{I}_n$: Matriz identidad de orden n

Para que exista la inversa de la matriz P es necesario que la matriz sea cuadrada y el $\det P \neq 0$

Método de Gauss-Jordan

Se utiliza la matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz cuadrada de orden n con la matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$; una vez aumentada la matriz, por medio de operaciones elementales, se obtiene otra matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{array}\right]$$

Si en el proceso algún elemento de la diagonal principal es cero, entonces la matriz no tiene inversa.

EJEMPLOS

1 Obtén R^{-1}, si $R=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Solución

Se aumenta la matriz y se efectúan las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]_{R_2 \leftrightarrow R_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]_{2R_1 - R_2 \to R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right]_{7R_1 - 3R_2 \to R_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right]_{\frac{R_1}{7} \to R_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right]_{-\frac{R_2}{7} \to R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Por tanto, $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

2 Determina B^{-1} si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4R_1-R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right]_{10R_2-3R_3\to R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_2+2R_3\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & -21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{\frac{1}{3}R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1+R_3\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1-2R_2\to R_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]$$

Finalmente, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 2 \\ 8 & -10 & 3 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 165

Determina la matriz inversa de las siguientes matrices:

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Si el sistema se expresa en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$$

Si existe $\boldsymbol{A}^{-1}$, se multiplican por $\boldsymbol{A}^{-1}$ *a* ambos miembros de la igualdad.

Se obtiene: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$, pero $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ entonces, $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$. $\rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

Esta última expresión resuelve el sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$.

Solución

Se definen las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{C}$, entonces: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

Luego, se obtiene la matriz inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{R_2 \leftrightarrow R_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{2R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{R_1 - \frac{4}{11}R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{\frac{1}{11}R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

Por consiguiente, $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión: $X=A^{-1}C$
Entonces:

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11}(7)+\frac{3}{11}(-2)\\ -\frac{1}{11}(7)+\frac{2}{11}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son:

$$x=2,\ y=-1$$

2 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases}x+y-2z=-4\\ 2x-y-z=1\\ 3x-2y+z=7\end{cases}$.

Solución

Se definen las matrices A, X y C, entonces: $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}-4\\1\\7\end{bmatrix}$

Se obtiene la matriz A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]_{\substack{-2R_1+R_2\rightarrow R_2\\ -3R_1+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{-\frac{1}{3}R_2\rightarrow R_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{\substack{-R_2+R_1\rightarrow R_1\\ 5R_2+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1\end{array}\right]_{\frac{1}{2}R_3\rightarrow R_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{array}\right]_{\substack{R_3+R_1\rightarrow R_1\\ R_3+R_2\rightarrow R_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{array}\right]$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4)+\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{5}{6}(-4)+\left(-\frac{7}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{1}{6}(-4)+\left(-\frac{5}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$

EJERCICIO 166

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de la inversa de una matriz.

1. $\begin{cases} 4x - y = 22 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7m + 9n = -10 \\ 2n - 3m = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6a + 7b = -4 \\ a - 2b = 31 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a - 2b + c = 12 \\ 2a + b - c = 3 \\ a - b + 3c = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 4y + z = 12 \\ 3x - 5y - 2z = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -2 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 17

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Reseña HISTÓRICA

Niccolo Fontana-Tartaglia (1500-1557)

Nació en Brescia y murió en Venecia. Su verdadero nombre era Fontana, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, causada por una cuchillada asestada por un soldado francés, que le derivó secuelas en el habla. Fue el primero en idear un procedimiento general de resolución de ecuaciones de tercer grado, manteniendo en secreto sus métodos. Cardano le engañó bajo la promesa de mantener en secreto estos métodos pero, faltando a su honor, los publicó. En 1537 publicó su primer libro sobre teoría balística.

Niccolo Fontana-Tartaglia
(1500-1557)

Teorema del factor y del residuo

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y $bx + c$ un binomio, entonces:

a) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$

b) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde k es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$, asimismo, $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación $bx + c = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $3x - 1$ es factor del polinomio $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$.

Solución

El binomio $3x - 1$, se iguala con cero y se despeja x

$$3x - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}$$

Este resultado de la ecuación se evalúa en $f(x)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{27}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right) - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6 = 0$$

Como el resultado de $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, entonces se concluye que $3x - 1$, si es factor del polinomio.

2 Obtén el residuo de dividir $4x^3 - 11x^2 - x + 14$ entre $x - 3$.

Solución

Al aplicar el teorema del residuo, se iguala con cero $x - 3$ y el resultado del despeje se sustituye en el polinomio $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - x + 14$

$$f(3) = 4(3)^3 - 11(3)^2 - (3) + 14 = 20$$

Por tanto el residuo de la división es 20

3 Identifica cuál de las siguientes expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, son factores del polinomio $f(x) = 10x^3 + 57x^2 + 71x + 12$.

Solución

Las expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, se igualan con cero y se despeja a x, para luego evaluar los valores obtenidos en $f(x)$:

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 10\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + 57\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 71\left(-\frac{1}{5}\right) + 12 = 0$$ por tanto $5x + 1$, si es factor

$$f(4) = 10(4)^3 + 57(4)^2 + 71(4) + 12 = 1848$$, por tanto $x - 4$, no es factor

$$f(-4) = 10(-4)^3 + 57(-4)^2 + 71(-4) + 12 = 0$$, por tanto $x + 4$, si es factor

4 Determina el valor de k, tal que $f(x) = 3kx^3 + (4k+5)x^2 - 19x - 12$, sea divisible por: $x + 3$.

Solución

Para que $f(x)$ sea divisible por $x + 3$, se debe de cumplir que $f(-3) = 0$, entonces:

$$f(-3) = 3k(-3)^3 + (4k+5)(-3)^2 - 19(-3) - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación para k:

$$-45k + 90 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k = 2$$

Por tanto, el valor de $k = 2$ y el polinomio queda expresado como:

$$f(x) = 6x^3 + 13x^2 - 19x - 12$$

5 Determina los valores de k, tales que $f(x) = kx^3 - (k^2 - 2)x^2 - (k+3)^2x - 20$, sea divisible por: $3x + 2$.

Solución

Para que el polinomio sea divisible por $3x + 2$, se debe cumplir que $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, entonces:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = k\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(k^2 - 2\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(k+3\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right) - 20 = 0$$

Al desarrollar la expresión se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$3k^2 + 50k - 177 = 0$$

Cuyas soluciones para k, son los valores, 3 y $-\frac{59}{3}$, entonces los polinomios son:

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 36x - 20 \text{ y } f(x) = -\frac{1}{9}\left[177x^3 + 3463x^2 + 2500x + 180\right]$$

Raíces

Dado el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, el número de raíces o ceros corresponde al grado n del polinomio y son aquellos valores que cumplen la condición $f(x_n) = 0$, éstos pueden ser reales, complejos o ambos, de acuerdo a las características propias del polinomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que -2, 1 y 3 son raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución

Se sustituyen los valores -2, 1 y 3 en el polinomio:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

Todos los residuos son iguales a 0, por consiguiente, se demuestra que estos valores son raíces o ceros del polinomio.

2 Prueba que $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$.

Solución

Los valores $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son sustituidos en el polinomio

$$\begin{aligned} f(-i) = 3(-i)^3 - (-i)^2 + 3(-i) - 1 = 3(-i^3) - (i^2) - 3i - 1 &= -3i^3 - i^2 - 3i - 1 \\ &= -3(-i) - (-1) - 3i - 1 \\ &= 3i + 1 - 3i - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(i) = 3(i)^3 - (i)^2 + 3(i) - 1 = 3(i^3) - (i^2) + 3i - 1 &= 3i^3 - i^2 + 3i - 1 \\ &= 3(-i) - (-1) + 3i - 1 \\ &= -3i + 1 + 3i - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 3\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9} + 1 - 1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1 - 1 = 0$$

Por tanto, se prueba que $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio.

3 Determina cuáles de los siguientes números 4, 1, $1 + i$ y $-1 - 2i$ son ceros del polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$.

Solución

Se sustituye uno a uno los números en el polinomio, esto con el fin de saber cuáles son raíces del mismo.

$$f(4) = (4)^4 + 5(4)^3 + 7(4)^2 + 7(4) - 20 = 696$$

$$f(1) = (1)^4 + 5(1)^3 + 7(1)^2 + 7(1) - 20 = 0$$

$$f(1+ i) = (1 + i)^4 + 5(1 + i)^3 + 7(1 + i)^2 + 7(1 + i) - 20 = -27 + 31i$$

$$f(-1 - 2i) = (-1 - 2i)^4 + 5(-1 - 2i)^3 + 7(-1 - 2i)^2 + 7(-1 - 2i) - 20 = 0$$

Por consiguiente, los valores 1 y $-1 -2i$ son los únicos que son raíces del polinomio.

Si las raíces de un polinomio son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ entonces el polinomio se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

EJEMPLOS

1 Determina el polinomio cuyas raíces son los números -3, 0 y 4.

Solución

Dado que existen tres raíces, el polinomio a obtener es:

$$f(x) = (x - (-3))(x - 0)(x - (4))$$

$$f(x) = (x + 3)(x)(x - 4),$$

Se desarrolla el producto de los binomios y finalmente el polinomio es:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 12x$$

2 Determina el polinomio de tercer grado con ceros en -1, $\frac{1}{2}$ y $f(-2)=-\frac{35}{8}$.

Solución

Dado que el polinomio es de tercer grado, se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(x)=\left(x-(-1)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)$$

Y se sabe que $f(-2)=-\frac{35}{8}$ entonces:

$$f(-2)=\left(-2+1\right)\left(-2-\frac{1}{2}\right)\left(-2-x_3\right) \quad \rightarrow \quad -\frac{35}{8}=\left(-1\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-2-x_3\right)$$

Al resolver para x_3, se obtiene que:

$$x_3=-\frac{1}{4}$$

Por tanto, el polinomio que cumple las condiciones establecidas es:

$$f(x)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}$$

3 Obtén el polinomio de tercer grado si se sabe que sus raíces son: $-1-i$, $-1+i$ y 5.

Solución

El polinomio se representa de la forma:

$$f(x)=\left(x-(-1-i)\right)\left(x-(-1+i)\right)\left(x-5\right)=\left(x+1+i\right)\left(x+1-i\right)\left(x-5\right)$$

Al desarrollar el producto se obtiene:

$$f(x)=x^3-3x^2-8x-10$$

4 Encuentra el polinomio de cuarto grado si se sabe que sus raíces son: $2i$, -3, y además $f(-1)=-50$ y $f(0)=-48$.

Solución

Al tratarse de un polinomio de cuarto grado se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$f(x)=\left(x-2i\right)\left(x+3\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$

Pero se sabe que $f(-1)=-50$, entonces:

$$f(-1)=\left(-1-2i\right)\left(-1+3\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right) \quad \rightarrow \quad -50=\left(-1-2i\right)\left(2\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right)$$

También se cumple que $f(0)=-48$, por tanto:

$$f(0)=\left(0-2i\right)\left(0+3\right)\left(0-x_3\right)\left(0-x_4\right) \quad \rightarrow \quad -48=\left(-2i\right)\left(3\right)\left(-x_3\right)\left(-x_4\right)$$

Donde se genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_3 x_4 = \dfrac{8}{i} \\ x_3 + x_4 + x_3 x_4 = \dfrac{24-2i}{1+2i} \end{cases}$$

El cual tiene como soluciones $x_3 = 4$ y $x_4 = -2i$, por lo que el polinomio queda definido como:

$$f(x) = (x-2i)(x+3)(x-4)(x+2i) \qquad \rightarrow \qquad f(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48$$

Cálculo de las raíces por división sintética

Para encontrar las raíces de un polinomio se emplea la división sintética, así como los diversos métodos de factorización y resolución de ecuaciones, además de hacer uso de la regla de los signos de Descartes.

Regla de los signos de Descartes

Esta regla nos permite determinar el tipo de raíz posible para un polinomio (positiva, negativa o compleja)

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, entonces sucede que:

- El número de raíces positivas es igual o menor en dos al número de cambios de signo del polinomio.
- El número de raíces negativas es igual o menor en dos al número de cambios de signo de la evaluación $f(-x)$.
- El número de raíces complejas depende del número de raíces positivas o negativas que tenga el polinomio. Si el polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja entonces también tiene como raíz su conjugado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dado el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, determina sus raíces.

Solución

Si se aplica la regla de Descartes se observa que:

1. Existen dos cambios de signos en $f(x)$, en consecuencia el polinomio tiene dos posibles o ninguna raíz positiva

$$f(x) = +x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

2. Se evalúa $f(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 11x + 12$$

Se observa que sólo hay un cambio de signo, por tanto existe una posible raíz negativa.
De acuerdo con la regla de los signos de Descartes las posibles combinaciones de raíces son:

Raíces positivas	2	0
Raíces negativas	1	1
Raíces complejas	0	2

Se factoriza el polinomio mediante el uso de la división sintética, como a continuación se ilustra.
Ya que el coeficiente de x^3 es 1, se toman únicamente los divisores de 12

$$\text{Divisores de } 12 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.
Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

1	−2	−11	12	1
	1	−1	−12	
1	−1	−12	0	4
	4	12		
1	3	0		−3
	−3			
1	0			

Finalmente, las raíces del polinomio son: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -3$

2 Dado el polinomio $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 12x$, determina sus raíces.

Solución

Este polinomio carece de término independiente, entonces una de las raíces es cero y mediante una factorización el polinomio se expresa como:

$$f(x) = x\,p(x) = x\,(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12)$$

Se aplica la regla de Descartes al polinomio $p(x)$ para determinar el número de posibles raíces:

1. Existe un cambio de signo en $p(x)$, en consecuencia el polinomio tiene una o ninguna posible raíz positiva

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$$

2. Se evalúa el polinomio $p(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$p(-x) = +\ x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12$$

Se observa que hay tres cambios de signo, por tanto existen tres, una o ninguna posibles raíces negativas.
De acuerdo con la regla de Descartes las combinaciones posibles de raíces son:

Raíz cero	1	1	1
Raíces positivas	1	1	0
Raíces negativas	3	1	0
Raíces complejas	0	2	4

Con el método de división sintética se factoriza el polinomio $p(x)$

1	3	−2	−10	−12	2
	2	10	16	12	
1	5	8	6	0	−3
	−3	−6	−6		
1	2	2	0		

Se observa que no existe ningún divisor de 2 que dé como residuo cero en la división sintética, por tanto las dos raíces restantes son complejas y conjugadas. Hasta este momento la factorización del polinomio $f(x)$ es:

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^2 + 2x + 2)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se iguala a cero el polinomio $x^2 + 2x + 2$ y se obtienen las raíces restantes:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, las raíces del polinomio $f(x)$ son:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = -1 + i,\ x_5 = -1 - i$$

3 Determina las raíces del polinomio $f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 13x^2 + 6x + 1$.

Solución

El polinomio se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 4x^2 + 9x^2 + 6x + 1$$

Se agrupan los términos

$$f(x) = (36x^4 + 24x^3 + 4x^2) + (9x^2 + 6x + 1)$$

El factor común da:

$$f(x) = 4x^2(9x^2 + 6x + 1) + 1(9x^2 + 6x + 1) = (4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1)$$

Para hallar las raíces de $f(x)$, se iguala a cero el polinomio, entonces

$$(4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1) = 0$$
$$4x^2 + 1 = 0 \ ;\ 9x^2 + 6x + 1 = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{4} \ ;\quad (3x+1)^2 = 0$$
$$x = \pm\frac{i}{2};\qquad x = -\frac{1}{3}$$

se dice que existe multiplicidad cuando una raíz se repite dos o más veces, como en este caso, por tanto las raíces del polinomio son:

$$x_1 = \frac{i}{2},\ x_2 = -\frac{i}{2},\ x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIO 167

Indica cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio propuesto:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10;\ x - 2, x - 1, x - 5$
2. $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6;\ 2x + 3, x + 2, x + 1$
3. $p(x) = 3x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x - 16;\ 3x - 2, x + 2, x - 2$
4. $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18;\ x + 1, x + 3i, x - 2i, x + 2i$
5. $h(x) = x^4 + 20x^2 + 64;\ x + i, x - i, x + 2i, x - 2i$
6. $m(x) = x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 34x^2 + 26x;\ x + 6, x, x + 1 - i, x - 1 + i, x + 2 + 3i$

Determina el residuo que se obtiene al dividir el polinomio por los binomios dados:

7. $(x^3 + 13x^2 + 14x - 88) \div (x + 2)$

8. $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) \div (2x + 1)$

9. $(6x^3 + 37x^2 + 32x - 15) \div (2x - 3)$

10. $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12) \div (x + 1)$

11. $(5x^4 - 26x^3 + 15x^2 + 38x - 8) \div (x + 2)$

12. $(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) \div (x + 3)$

Determina los valores de *k* para que el polinomio:

13. $f(x) = x^3 - kx^2 - (5k + 1)x + 12$, sea divisible por $x - 4$

14. $f(x) = 2x^3 + (2k + 1)x^2 - (k^2 + 1)x - 24$, sea divisible por $2x + 3$

15. $f(x) = kx^3 - (k^2 - 1)x^2 + (7k + 5)x - 12$, sea divisible por $3x - 1$

16. $f(x) = (2k^2 - 2)x^3 - (5k - 1)x^2 - (3k^2 - 4k + 3)x - 6$, sea divisible por $5x + 1$

17. $f(x) = kx^4 - 2kx^3 - (4k^2 - 3)x^2 + (k - 2)x + 15$, sea divisible por $x + 3$

Indica si los valores propuestos son raíces de los polinomios:

18. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$; $x = 3, x = 4, x = 5$

19. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 18x + 27$; $x = 3i, x = -3i, x = -\frac{3}{2}$

20. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 27x + 18$; $x = 1, x = -2, x = -9$

Determina cuáles de los valores propuestos son raíces de los polinomios:

21. $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 7x + 22$; $x = \frac{11}{2}\ x = -2, x = -1$

22. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 13x + 15$; $x = 2 + i, x = -2 - i, x = -\frac{3}{5}$

23. $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$; $x = -1, x = \frac{5}{3}\ x = -\frac{1}{2}$

24. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$; $x = -3, x = -1, x = 2i, x = -2i$

25. $f(x) = 25x^4 - 100x^3 - 19x^2 + 82x - 24$; $x = 4, x = 1, x\ \frac{3}{5}\ x = -\frac{2}{5}$

Encuentra el polinomio cuyas raíces son:

26. $x = -5, x = 0, x = 1$

27. $x = 3, x = -3, x = -4$

28. $x = \frac{1}{3}\ x = 4i, x = -4i$

29. $x = -\frac{3}{4}\ x = -2, x = \frac{5}{2}$

30. $x = 4, x = -5, x = 3 - 2i, x = 3 + 2i$

31. $x = i, x = -i, x = \frac{1}{2}\ x = \frac{1}{3}$

Encuentra el polinomio que cumpla con las siguientes características:

32. Polinomio de tercer grado, con raíz en $\frac{1}{3}, f(1) = 10,\ f(-1) = -4$

33. Polinomio de tercer grado con raíz en $1, f(1) = 0,\ f(0) = 1$

34. Polinomio que sea de cuarto grado, con raíces, -1, i y $-i$, además $f(3) = 40$

35. Polinomio de cuarto grado con raíces en -3, multiplicidad 2 en raíz 1 y $f(0) = -3$

36. Polinomio que sea de cuarto grado, multiplicidad 3 en la raíz 2 y $f(-1) = -27$

37. Polinomio de quinto grado con raíces $1, -1$ y $f(-2) = 0, f(0) = -2, f(2) = 60$

Determina las raíces de los siguientes polinomios:

38. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
39. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$
40. $f(x) = 15x^3 - 53x^2 - 30x + 8$
41. $f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 30x + 25$
42. $f(x) = x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 42x$
43. $f(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 - 16x - 96$
44. $f(x) = 6x^4 + x^3 - 20x^2 - 42x - 20$
45. $f(x) = 2x^5 + 13x^4 + 19x^3 + x^2 + 17x - 12$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente